Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 12 (12 décembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la caractérisation de la continuité d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.

1.2 Application

Soit $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme qui à un polynôme associe la somme des valeurs absolue de ses coefficients. Soient

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

et

$$v : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \right. .$$

— Les applications u, v et $v \circ u$ sont-elle continues ?

— On a $||u(X^n)|| = n$ et $||X^n|| = 1$ donc u n'est pas continue.
On a $|v(P)| \leqslant ||P||$ donc v est continue.
On a $||(vu)(P)|| = |a_1| \leqslant ||P||$ donc $v \circ u$ est continue.

1.3 Exercices

Exercice 1

1. — Soient F un fermé et K un compact d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $F + K$ est fermé.
   — Soit $u_n = f_n + k_n \in F + K$ une suite convergente vers $u \in E$. Il existe φ telle que $k_{\varphi(n)}$ converge vers $k \in K$, donc $f_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} - k_{\varphi(n)}$ converge vers $u - k =: f$. Or F est fermé donc $f \in F$ et $u = f + k \in F + K$.
2. — Soient $A := \left\{(x, y) \;\middle|\; xy = 1\right\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$. Montrer que A et B sont fermés mais que $A + B$ ne l'est pas.
   — Les parties A et B sont fermés comme images réciproques de fermés par $(x, y) \mapsto xy$ et $(x, y)x$. On a $x \neq 0 \Rightarrow (x, y) = (x, 1/x) + (0, y - 1/x)$ donc $A + B = \mathbb{R}^2 \backslash B$. La suite $(1/n, 0)$ est une suite de $A + B$ qui converge vers $(0, 0)$ donc $A + B$ n'est pas fermée.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la caractérisation de la compacité en dimension finie.

2.2 Application

Soient $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, S la boule unité fermée, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXAX \end{array} \right. .$$

— Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in S$ tels que $\forall X \in S \varphi(X) \in [a, b]$ et $\varphi(X_1) = a, \varphi(X_2) = b$.

— L'application φ est un polynôme en les coordonnées de X (ou est la composée d'une application bilinéaire et de $X \mapsto (X, X)$) donc est continue.
La boule S est un fermé borné donc un compact. Donc, par le théorème des bornes atteintes, on a le résultat demandé.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soient $E := \mathbb{R}[X]$ muni de la norme uniforme sur $[0, 1]$, $u : P \mapsto (X - 2)P$ et $v : P \mapsto P(X - 2)$.

1. — Rappeler pourquoi $||\cdot||$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   — Un polynôme admettant une infinité de racines est nul.
2. — Les endomorphismes u et v sont-ils continus ? Si oui, calculer leur norme d'opérateur.
   — On a $||u(P)|| \leqslant 2\,||P||$ et $||u(1)|| = 2 = 2\,||1||$. Donc u est continu et $||u|| = 2$.
   On a $||v(X^n)|| = 2^n = 2^n\,||X^n||$ donc v n'est pas continu.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Donner la définition d'une application continue, uniformément continue, lipschitzienne. Montrer les différente implications entre ces trois propriétés.

3.2 Application

— Prouver les implications fausses.

— L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est continue mais pas uniformément continue par le théorème des accroissements finis.
L'application $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne par le théorème des accroissements finis.

3.3 Exercices

Exercice 1

On considère

$$N : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \max_j \sum_i |a_{i,j}| \end{array} \right. .$$

1. — Justifier que N est une norme.
   — On a $||C_j(A+B)||_1 \leqslant ||C_j(A)||_1 + ||C_j(B)||_1 \leqslant N(A) + N(B)$ donc, en passant au max, on a l'inégalité triangulaire.
2. — Calculer la norme subordonnée de tr.
   — On a $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant nN(A)$ et $|\mathrm{tr}(I_n)| = n = nN(I_n)$ donc $||\mathrm{tr}|| = n$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(x_n)_n$ une suite convergente de limite l.

— Montrer que $K := \{x_n \ ; \ n\} \cup \{l\}$ est compact.

— La suite est convergente donc bornée donc K est borné.
Soit $(u_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ convergente vers $l' \in E$. Si $l = l'$, $l' \in K$. Supposons $l' \neq l$ et notons $r := \frac{||l-l'||}{2} > 0$. Les deux boules $B(l,r)$ et $B(l',r)$ sont disjointes et, à partir d'un certain rang N, $x_n \in B(l,r)$ et $u_n \in B(l',r)$ donc $u_n \notin B(l,r)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$. Donc $(u_n)_n$ prend un nombre fini de valeurs donc il existe ψ telle que $(u_{\psi(n)})_n$ est constante égale à x_{n_0}. Donc $l' = x_{n_0} \in K$. Donc K est fermée.
Donc K est un fermé borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie donc est compact.

Exercice 2

Soient $A, B \subset E$. On note

$$d(A,B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(a,b).$$

1. — Justifier que $d(A,B)$ existe et donner un exemple où elle est nulle alors que $A \cap B = \emptyset$.
   — Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
   On prend une partie A non fermée et B un singleton d'un point adhérent à A mais non dans A. Avec $A =]0,1]$ et $B = \{0\}$, $d(A,B) \leqslant d(1/n, 0) = 1/n$, donc $d(A,B) = 0$.
2. — Supposons A, B compactes et disjointes. Montrer que $d(A,B) \neq 0$.
   — Il existe $(a_n, b_n)_n \in (A \times B)^{\mathbb{N}}$ telle que $d(a_n, b_n) \to d(A,B)$. Il existe φ, ψ telles que $a_{\varphi(n)} \to a \in A$ et $b_{\psi(n)} \to b \in B$. Par cont. de $(x,y) \mapsto x-y$ et de $||\cdot||$, $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue. Par unicité de la limite, $d(A,B) = d(a,b) > 0$.

Exercice 3

Soit K un compact de E et $f : K \to K$ continue telle que

$$x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y|| .$$

1. — Montrer que f et $g : x \in K \mapsto ||f(x) - x|| \in \mathbb{R}_+$ sont continues.

— La fonction f est 1-lip. et g est cont. par composition.

2. — Montrer qu'il existe un unique point fixe de f sur K.
   — Unicité. Soient x, y deux point fixes. On a $x \neq y \Rightarrow ||x-y|| < ||x-y||$ donc $x = y$. Existence. Par continuité sur un compact, g atteint son minimum en $a \in K$. Par l'absurde, supposons $f(a) \neq a$. On a $g(f(a)) = ||f(f(a)) - f(a)|| < ||f(a) - a|| = g(a)$ ce qui contredit la minimalité de $g(a)$. Ainsi, $f(a) = a$ et a est un point fixe.