Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 4 (3 octobre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la formule de Grassman.

1.2 Application

— Soient $F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+2z=0\right\}$ et $G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=-y=-z\right\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que F est un supplémentaire de G.

— Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. On a $x+y+2z=0$ et $x=-y=-z$ donc $2z=0$ i.e. $z=0$, d'où $(x,y,z)=(0,0,0)$. Ainsi $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Le sous-espace vectoriel F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$ donc, par le théorème du rang, $\dim F = 3-1=2$. De plus, G est engendré par $(1,-1,-1)$ donc $\dim G = 1$. Par la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = 2+1-0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc $F+G=\mathbb{R}^3$. Finalement, $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

1.3 Exercices

Exercice 1

1. — Étudier la nature de la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$.
   — Pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Or la série harmonique diverge, donc $\sum_n \frac{\ln n}{n}$ diverge.
2. — Étudier la nature de la série de terme général $u_n := \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln n}{n}$.
   — La fonction $f : t \in [1,+\infty[\mapsto \frac{\ln t}{t} \in \mathbb{R}$ est positive et dérivable. Pour tout $t \geqslant 1$, $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$ donc f est décroissante sur $[e,+\infty[$.
   Pour tout $n \geqslant 4$, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)dt \leqslant f(n-1)$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant f(n-1) - f(n)$. Or $f(n) \to 0$ par croissance comparée, donc la série de terme général $f(n-1)-f(n)$ converge. Donc la série de terme général $(u_n)_n$ converge.
3. — Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.
   — La série de terme général u_n converge donc il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^n u_k = s + o(1)$. Or $\sum_{k=2}^n u_k = \int_1^n \frac{\ln t}{t} dt - \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$ et $\int_1^n \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$, donc $\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - s + o(1)$. Donc $c=-s$ convient.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. — Déterminer le noyau $\operatorname{Ker} f$ et sa dimension.
   — On a $\operatorname{Ker} f = \left\{(x+y+z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-z=0\right\}$. C'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.
2. — Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
   — Par le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est une droite. Ainsi, n'importe quelle colonne non nulle de M est une base de $\operatorname{Im} f$: par exemple, $(1, -3, -2)$.
3. — Donner une base b de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   — Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $b := (e_1, e_2, e_3)$ une telle base. On a $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 0$. Ainsi, $e_1 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ et $e_3 \in \operatorname{Ker} f$.
   On choisit $e_1 := (1, -3, -2)$. On cherche un antécédent de e_1 pa f, i.e. une solution non nulle $X = (x, y, z)$ à l'équation $MX = e_1$ avec e_1 la première colonne de M. On choisit par exemple $e_2 = (1, 0, 0)$. Enfin, on cherche $e_3 \in \operatorname{Ker} f$ indépendant de e_1 : par exemple, $e_3 := (1, 0, 1)$.
   Vérifions que la famille b ainsi construite est bien une base. On a $\det(e_1, e_2, e_3) = 3 \neq 0$ donc b est une base. On a bien $\operatorname{Mat}_b(f) = M$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n F un K-espace vectoriel. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n) \in F$. Existe-t-il une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \; u(e_i) = f_i$? Est-elle unique ? Le démontrer.

2.2 Application

— Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\bigcap_{\varphi \in E^*} \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.
— Soit $x \in \bigcap_{\varphi \in E^*} \operatorname{Ker} \varphi$ tel que $x \neq 0$. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (x) en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de E. Il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$. Ainsi, $x \notin \operatorname{Ker} \varphi$ et cela est une contradition. Donc, par l'absurde, $\bigcap_{\varphi \in E^*} \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. — Pour tout $x > -1$, montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$.
   — Soit $f : x \in]-1+\infty[\mapsto x - \ln(1+x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{x}{1+x}$ dont f atteint son minimum en 0. Donc, pour tout $x > -1$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ d'où l'inégalité recherchée.
2. — On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $\forall n \geqslant 1$, $u_n := H_n - \ln n$ et $v_n := u_n - 1/n$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

— On a $u_n - v_n = 1/n \to 0$. Pour tout n, $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante. Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ donc $(v_n)_n$ est croissante. Ainsi $(u_n)_n$

3. — Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
   — Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes donc convergent vers une limite commune γ. On a $\gamma \geqslant v_2 = 1 - \ln 2 > 0$. De plus, $u_n = \gamma + o(1)$, i.e. $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout (i,j), $j = i+1 \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $j \neq i+1 \Rightarrow a_{i,j} = 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. — Écrire la matrice A.
   — Il s'agit de la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont ceux de la première surdiagonale, tous égaux à 1.
2. — Calculer $(f^2(e_1), \dots, f^2(e_n))$ et en déduire A^2.
   — On a $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (0, e_1, \dots, e_{n-1})$ et $(f^2(e_1), \dots, f^2(e_n)) = (0, 0, e_1, \dots, e_{n-2})$. Donc A^2 est la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont ceux de la deuxième surdiagonale, tous égaux à 1.
3. — Écrire les matrices A^{n-1} et A^n.
   — Par récurrence, $(f^{n-1}(e_1), \dots, f^{n-1}(e_n)) = (0, \dots, 0, e_1)$ et $(f^n(e_1), \dots, f^n(e_n)) = (0, \dots, 0)$. Ainsi, A^{n-1} est la matrice dont l'unique coefficient non nul est $\left[A^{n-1}\right]_{1,n} = 1$ et $A^n = 0$.
4. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer qu'il existe une base b de E telle que $\mathrm{Mat}_b(u) = A$.
   — On a $u^{n-1} \neq 0$ donc il existe $e_n \in E$ tel que $u^{n-1}(e_n) \neq 0$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $e_i := u^{n-i}(e_n)$. Ainsi, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u(e_i) = e_{i-1}$.
   Montrons que $b := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Elle possède $n = \dim E$ vecteur donc il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de scalaires non tous nuls telle que $\sum_i \lambda_i e_i = 0$. Soit $i_0 := \max\left\{i \in [\![1, n]\!] \;\middle|\; \lambda_i \neq 0\right\}$. On a $u^{n-i_0-1}\left(\sum_i \lambda_i e_i = 0\right) = 0$, i.e. $\lambda_{i_0} e_n = 0$, i.e. $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui est une contradiction. Donc b est libre, donc b est une base.
   Par ailleurs, on a bien $\mathrm{Mat}_b(u) = A$.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la formule du rang.

3.2 Application

— Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et L un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim u(L) = \dim L - \dim(L \cap \operatorname{Ker} u)$.

— On applique la formule du rang à l'endomorphisme $f := u|_L$: $\dim L = \dim f(F) + \dim \operatorname{Ker} f = \dim u(F) + \dim(L \cap \operatorname{Ker} u)$.

3.3 Exercices

Exercice 1

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'unique suite telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. — Étudier la convergence et l'éventuelle limite de la suite $(u_n)_n$.
   — Par une récurrence directe, la suite $(u_n)_n$ est à termes positifs. On a donc, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$, i.e. $(u_n)_n$ est décroissante. Comme $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $l \geqslant 0$. Par continuité de exp, $le^{-l} = l$ donc $l = 0$ ou $e^{-l} = 1$, i.e. $l = 0$.
2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n := \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que $(v_n)_n$ converge vers 1.
   — On a $v_n = \frac{1-e^{u_n}}{u_n e^{-u_n}} \sim \frac{u_n}{u_n} = 1$. Donc $v_n \to 1$.
3. — Rappeler le théorème de Cesàro. Donner un équivalent de la suite $(u_n)_n$.
   — On rappelle que, si $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_n \to a$. On applique ce résultat à la suite $(v_n)_n$: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \to 1$. Or $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right)$ avec $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{1}{nu_n}$. Ainsi, $\frac{1}{nu_n} \to 1$, i.e. $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que u^{p-1} et $u^p = 0$.

1. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$ tels que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est libre.
   — Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ une famille de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i u^i(x) = 0$. Soit $i_0 = \min\left\{i \in [\![0, k]\!] \;\middle|\; \lambda_i \neq 0\right\}$. On a $k - 1 \leqslant p - 1$ donc $p - 1 - i_0 \geqslant 0$ et $u^{p-1-i_0}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i u^i(x)\right) = 0$, i.e. $\lambda_{i_0} u^{p-1}(x) = 0$, i.e. λ_{i_0}, ce qui est une contradiction. Donc $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est libre.
2. — Soit $e^u := \sum_{k^0}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k$. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} e^u - \mathrm{Id}_E$.
   — Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a $e^u(x) = x$ donc $x \in \operatorname{Ker} e^u - \mathrm{Id}_E$.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} e^u - \mathrm{Id}_E$. On a $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k(x) = 0$. Par l'absurde, supposons $u(x) \neq 0$. Soit $k := \max i \in [\![1, p-1]\!] u^i(x) = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k!} u^k(x) = 0$. Or, par la question précédente, $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est libre. On a donc une contradiction. Ainsi, $u(x) = 0$, i.e. $u \in \operatorname{Ker} u$.
   Par double inclusion, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} e^u - \mathrm{Id}_E$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

— Montrer qu'une matrice A d'ordre n impair n'est pas inversible.
— On a $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$ d'où $\det A = 0$ et A n'est pas inversible.

Exercice 2

— Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = -u$. Montrer que u n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
— On a $\det u^3 = \det(-u)$, i.e. $(\det u)^3 = -\det u$, i.e. $\det u$ est une racine réelle de $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, i.e. $\det u = 0$ et u n'est pas inversible.

Exercice 3

Soit $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. — Supposons M inversible. Montrer que $\det(\mathrm{I}_n - MN) = \det(\mathrm{I}_n - NM)$.
   —
2. — Calculer

$$A := \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n - NM & N \\ 0, \mathrm{I}_n & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ M & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ M & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & N \\ 0 & \mathrm{I}_n - MN \end{pmatrix}.$$

   — On a $A = B = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & N \\ M & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.
3. — Montrer que $\det(\mathrm{I}_n - MN) = \det(\mathrm{I}_n - NM)$.
   — On a $\det A = \det B$ donc, en calculant par blocs, $\det(\mathrm{I}_n - MN) = \det(\mathrm{I}_n - NM)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right. .$$

1. — Montrer que δ est bien définie et linéaire. Est-elle un injective ? Est-elle surjective ?
   — Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant \max(\deg P, \deg P(X+1) = \deg P \leqslant n$. Donc δ est bien définie. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P)(X+1) = \lambda(P(X+1))$ et $(P+Q)(X+1) = P(X+1) + Q(X+1)$. Donc δ est linéaire. On a $\Delta(1) = 0$ donc $\operatorname{Ker} \delta \neq \{0\}$ et δ n'est pas injective. Or δ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, donc elle n'est pas surjective.
2. — Donner une base de $\operatorname{Ker} \delta$.
   — Soit $P \in \operatorname{Ker} \delta$. On a, par une récurrence directe, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) = P(0)$. Ainsi, $P - P(0)$ admet une infinité de racines donc $P = P(0)$, i.e. P est constant. Ainsi $\operatorname{Ker} \delta \subset \mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion réciproque est immédiate, d'où $\operatorname{Ker} \delta = \mathbb{R}_0[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes constants.
3. — Déterminer $\mathrm{Im}\delta$.
   — Par le théorème du rang, $n + 1 = \dim(\mathrm{Im}\delta) + 1$, i.e. $\dim(\mathrm{Im}\delta) = 1$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le coefficient dominant de P est le même que celui de $P(X+1)$ donc $\deg \delta(P) \leqslant (\deg P) - 1 \leqslant n - 1$. Ainsi, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_{n-1}$. Par égalité des dimension, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 5

Soit E un K-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a \in K^*$ tels que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$.

1. — Montrer que la somme $\operatorname{Ker} f + \mathrm{Im} f$ est directe.
   — Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. On a $f^2(z) = f(y) = 0$ et $f^3(x) = 0$. Or $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$ donc, en évaluant en z, $a^2 x = 0$. Ainsi, $x = 0$. Donc $\mathrm{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
2. — Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
   — Réalisons une analyse-synthèse. Soit $x \in E$ et $(u, v) \in \operatorname{Ker} f \times \mathrm{Im} f$ tels que $x = u + v$. Il existe $w \in E$ tel que $v = f(w)$. On a $f(x) = f(v)$. Donc $f^2(x) = f^2(v) = f^3(w) = 3af^2(w) - a^2 f(w) = 3af(x) - a^2 v$. Ainsi $v = \frac{1}{a^2}(3af(x) - f^2(x))$ et $u = x - v$.
   Faisons la synthèse. Soit $x \in E$, $v := \frac{1}{a^2}(3af(x) - f^2(x))$ et $u := x - v$. On a $v = f\left(\frac{1}{a^2}(3ax - f(x))\right) \in \mathrm{Im} f$. De plus $f(u) = f(x) - f(v) = f(x) - \frac{1}{a^2}(3af^2(x) - f^3(x)) = \frac{1}{a^2}(a^2 f(x) - 3af^2(x) + f^3(x)) = 0$, donc $u \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $E = \operatorname{Ker} f + \mathrm{Im} f$.
   Finalement, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$