Colle PSI*

Antoine Médoc

Semaine 2 (26 septembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Soient $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum_n v_n$ converge. Montrer que $\sum_n u_n$ converge absolument.

1.2 Application

— Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\cos n + \sin n}{n^2}$?

— Pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\frac{\sin n + \cos n}{n^2}\right| \leqslant \frac{2}{n^2}$. Or $\sum_n \frac{2}{n^2}$ converge donc $\sum_n u_n$ converge absolument donc converge.

1.3 Exercices

Exercice 1

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n := e^{in\theta}$.

1. — Supposons $\theta = \pi$. Expliciter les suites extraites $(e_{2n})_n$ et $(e_{2n+1})_n$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_{2n} = 1$ et $e_{2n+1} = -1$.
2. — À quelle condition sur θ la suite $(e_n)_n$ converge-t-elle ?
   — Il s'agit d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$ de module 1. Ainsi, $(e_n)_n$ converge si, et seulement si, $e^{i\theta} = 1$. Or $\theta \in [0, 2\pi[$ donc $(e_n)_n$ converge si, et seulement si, $\theta = 0$.
3. Soit $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.
   (a) — Montrer que la suite $(u_n)_n := (\cos(n\theta))_n$ converge si, et seulement si, $v_n := (\sin(n\theta))_n$ converge.
   — Supposons que $(u_n)_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin\theta$ d'où $v_n = \frac{1}{\sin\theta}(u_n \cos\theta - u_{n+1})$. Donc $(v_n)_n$ converge.
   Réciproquement, supposons que $(v_n)_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos(\theta)$ d'où $u_n = \frac{1}{\sin\theta}(v_{n+1} - v_n \cos\theta)$. Donc $(u_n)_n$ converge.
   (b) — Les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ sont elles convergentes ou divergentes ?
   — On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = u_n + iv_n$. Or $(e_n)_n$ diverge donc, par contraposée, $(u_n)_n$ ou $(u_n)_n$ diverge. Donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ divergent.

Exercice 2

1. — Montrer que la série de terme général $u_n := \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^n + n^2}{n!}$ converge.

— La série de terme général $\frac{1}{2^{n+1}}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc elle converge. Par ailleurs, $\frac{2^n+n^2}{n!} \sim \frac{2^n}{n!}$ et, par croissance comparée, $\sum_n \frac{2^n}{n!}$ converge donc $\sum_n \frac{2^n+n^2}{n!}$ converge. Ainsi, $\sum_n u_n$ converge.

2. — Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
   — On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
3. — Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
   — On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ (série géométrique) et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ (série exponentielle). Par ailleurs, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e^1 + e^1 = 2e$. Ainsi, par linéarité, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 + e^2 + 2e$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer le critère de convergence des séries de Riemann.

2.2 Application

— Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$?
— On a $u_n = \frac{n}{n^{3/2}\sqrt{1+1/n^3}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge. Donc $\sum_n u_n$ diverge.

2.3 Exercices

Exercice 1

1. — Étudier la convergence de la série de terme général $u_n := \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
   — On a $|u_n| = -\ln(1-1/n^2) \sim \frac{1}{n^2}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_n u_n$ converge absolument donc converge.
2. — Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.
   — On a $u_n = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.
3. — Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
   — Soit $p \geqslant 2$. On a $S_p := \sum_{n=2}^{p} u_n = \sum_{n=2}^{p} \ln(n+1) - \ln n + \sum_{n=2}^{p} \ln(n-1) - \ln n = \ln(p+1) - \ln 2 + \ln 1 - \ln p = -\ln 2 + \ln(1+1/p) \to -\ln 2$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln 2$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. — Étudier la convergence absolue et la convergence de la série de terme général u_n.
   — On a $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ donc, par le critère de Riemann, $\sum_n u_n$ ne converge pas absolument.
   La suite $(u_n)_n$ est alternée et $(|u_n|)_n$ est décroissante donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum_n u_n$ converge.
2. — Montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, $(x-a)(x-b) \leqslant (b-a)^2$.
   — Soit $x \in [a,b]$. On a $0 \leqslant x-a \leqslant b-a$ et $0 \leqslant b-x \leqslant b-a$.
3. — Montrer que le produit de Cauchy de la série par elle-même est divergent.

— Ce produit de Cauchy est la série de terme général $w_n := \sum_{p+q=n} u_p u_q = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}} \frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt{n-p+1}} = (-1)^n \sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. On a donc $|w_n| = \sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. Or $(p+1)(n-p+1) \leqslant (n+1-(-1))^2$ donc $|w_n| \geqslant \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$. Donc le produit de Cauchy $\sum_n w_n$ diverge grossièrement.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

3.2 Application

— Étudier la nature de la série de terme général $v_n := \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2 > 1$. Par le théorème de d'Alembert, la série $\sum_n v_n$ diverge grossièrement.

3.3 Exercice

Exercice 1

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ convergente.

1. — Montrer qu'il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1/2$.
   — La suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0, d'où le résultat.
2. — Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.
   — Pour tout n, $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| = 0$, i.e. $u_{n+1} = u_n = u_{n_0}$.

Exercice 2

1. — Étudier la nature de la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$.
   — Pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Or la série harmonique diverge, donc $\sum_n \frac{\ln n}{n}$ diverge.
2. — Étudier la nature de la série de terme général $u_n := \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln n}{n}$.
   — La fonction $f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\ln t}{t} \in \mathbb{R}$ est positive et dérivable. Pour tout $t \geqslant 1$, $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$.
   Pour tout $n \geqslant 4$, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)dt \leqslant f(n-1)$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant f(n-1) - f(n)$. Or $f(n) \to 0$ par croissance comparée, donc la série de terme général $f(n-1) - f(n)$ converge. Donc la série de terme général $(u_n)_n$ converge.
3. — Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.
   — La série de terme général u_n converge donc il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^n u_k = s + o(1)$. Or $\sum_{k=2}^n u_k = \int_1^n \frac{\ln t}{t} dt - \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$ et $\int_1^n \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2 t\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$, donc $\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - s + o(1)$. Donc $c = -s$ convient.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{n + \cos n}$.

1. — Étudier l'absolue convergence de $\sum_n u_n$.
   — On a $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_n u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. — Étudier la nature de $\sum_n u_n$ en réalisant un développement asymptotique.
   — On a $\frac{(-1)^n}{n\cos n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}(1+O(1/n)) = \frac{(-1)^n}{n} + O(1/n^2)$. Or, par le théorème de Leibniz, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, $\sum_n u_n$ converge.
3. — Étudier la nature de la série de terme général u_n par le critère spécial des séries alternées.
   — La suite $(u_n)_n$ est alternée et $|u_n| = \frac{1}{n+\cos n} \to 0$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$ donc $(n+\cos n)_n$ est croissante, donc $(|u_n|)_n$ est décroissante. Donc, par le théorème de Leibniz, $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 2

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'unique suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} := \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. — Étudier la suite $(z_n)_n$ dans le cas où $z_0 \in \mathbb{R}$.
   — Si $z_0 \geqslant 0$, $(z_n)_n$ est constante égale à z_0. Si $z_0 < 0$, $(z_n)_n$ est constante égale à 0 à partir du rang $n = 1$.
2. Supposons $z_0 \notin \mathbb{R}$.
   (a) — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n > 0$ et $\theta_n \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ tels que $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$.
   — Par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n \notin \mathbb{R}$. En particulier, z_n est de module non nul et d'argument non congru à 0 modulo π.
   (b) — Montrer que $(\rho_n)_n$ converge vers un réel $\rho \geqslant 0$.
   — On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \rho_n \frac{e^{i\theta_n}+1}{2} = \rho_n e^{i\theta_n/2}\cos(\theta_n)$ d'où $\rho_{n+1} = \rho_n |\cos(\theta/2)| \leqslant \rho_n$. La suite $(\rho_n)_n$ est décroissante et positive donc converge vers un réel $\rho \geqslant 0$.
   (c) — Montrer que $(z_n)_n$ converge.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $e^{i\theta_{n+1}} = e^{i\theta_n/2}$ donc $\theta_{n+1} \equiv \theta_n/2 \mod 2\pi$. Or $\theta_{n+1}, \theta_n/2 \in]-\pi, \pi[$ donc $\theta_{n+1} = \theta_n/2$. Ainsi la suite $(\theta_n)_n$ est géométrique de raison $1/2 \in]-1, 1[$ donc converge vers 0. Donc la suite $(z_n)_n$ converge vers $\rho \times 1 = \rho$.