Colle PSI*

Antoine Médoc

Semaine 5 (17 octobre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

- Énoncer le théorème de la double limite pour une série de fonctions.
- Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I telle que $\sum_n f_n$ CVU sur I et, pour tout n, f_n admet une limite l_n en a borne de I (éventuellement infinie).
  La série $\sum_n l_n$ converge, $\sum_n f_n$ admet une limite en a et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} l_n.$$

1.2 Application

- On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Montrer qu'elle est définie et sa somme S est continue sur $[0, +\infty[$ et étudier sa limite en $+\infty$.
- Soit $u_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Pour tout n, u_n est continue et $||u_n||_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_n u_n$ CVA donc CVU sur $\mathbb{R}_+$. Donc S existe et est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout n, u_n converge vers 0 en $+\infty$ donc, par le théorème de la double limite, S converge vers 0 en $+\infty$.

1.3 Exercices

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{n}{n+1}x \end{array} \right. .$$

- Étudier la convergence de la suite $(f_n)_n$.
- La suite CVS sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) - f(x) = -\frac{1}{n+1}x$ donc $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Donc $(f_n)_n$ ne CVU pas sur $\mathbb{R}$.
  Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}a$. Donc $(f_n)_n$ CVU sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \end{array} \right. .$$

1. — Montrer que la somme f de $\sum_n u_n$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

— Pour tout n, u_n est continue et $||u_n||_\infty \leqslant \frac{1}{1+n^2}$ donc $\sum_n u_n$ CVN donc CVU sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. — Étudier la limite de f en $+\infty$.
   — On a $\lim_{+\infty} u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{+\infty} u_n = 0$. Or $\sum_n u_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim_{+\infty} f = 1$.

3. — Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa dérivée.
   — La série $\sum_n u_n$ CVS et, pour tout n, u_n est $\mathcal{C}^1$ avec $u_n' : x \mapsto -n\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.
   Soit $a > 0$. Pour tout n, $||u_n||_{[a,+\infty[} \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n$ donc $\sum_n u_n'$ CVN sur $[a, +\infty[$.
   Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

4. — Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$,

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

   — La série $\sum_n u_n'$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout n la fonction u_n' est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $u_n'' : x \mapsto n^2\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.
   Soit $a > 0$. Pour tout n, $||u_n''||_{[a,+\infty[} \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n$ donc $\sum_n u_n''$ CVN sur $[a, +\infty[$.
   Donc f' est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\sum_n u_n''$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+n^2)\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \overset{\text{somme géométrique}}{=} \frac{1}{1-e^{-x}}$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Énoncer le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment.
— Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues qui CVU sur un segment $[a, b]$.
La série des intégrales est convergente et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt.$$

2.2 Application

— Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.
— Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$. Pour tout n, on note $u_n : x \mapsto (-1)^n x^n$.
Soit $a \in]-1, 1[$ et $I = [0, a]$ si $a \geqslant 0$, $I = [a, 0]$ sinon. Pour tout n, $||u_n||_I \leqslant |a|^n$ donc $\sum_n u_n$ CVN donc CVU sur I.
On a donc $\int_0^a \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a (-1)^n x^n\, dx$, i.e. $\ln(1+a) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}a^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}a^n$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n} \end{array} \right. .$$

— Étudier la convergence de $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$, $[0, 1[$ et, pour tout $a \in [0, 1[$, sur $[0, a]$.

— La suite $(f_n)_n$ CVS sur $[0,1]$ vers $f := \frac{1}{2}e^{-1}\mathbf{1}_{\{1\}}$.
Pour tout n, f_n est continue. Or f n'est pas continue, donc il n'y a pas CVU sur $[0,1]$.
On a

$$\lim_n \lim_{1^-} f_n = \lim_n \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e} \neq 0 = \lim_{1^-} \lim_n f_n$$

donc, par le théorème de la double limite, il n'y a pas CVU sur $[0,1]$.
Soit $a \in [0,1[$. Pour tout n, $||f_n||_{[0,a]} \leqslant a^n$ donc il y a CVU sur $[0,a]$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on note

$$u_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x^k \ln k} \end{array} \right. .$$

1. — Donner le domaine D de CVS de la série $\sum_n u_n$.
   — Soit $x \in]0,1[$. Pour tout n, $u_n(x) = \ln(x)\frac{(1/x)^n}{\ln n}$ avec $1/x > 1$. Donc $\sum_n u_n(x)$ DV grossièrement.
   Soit $x = 1$. Pour tout n, $u_n(x) = 0$ donc $\sum_n u_n(x)$ CV.
   Soit $x > 1$. Pour tout n, $|u_n(x)| = \mathcal{O}((1/x)^n)$ avec $1/x \in]-1,1[$ donc $\sum_n u_n(x)$ CV.
   Ainsi, $\sum_n u_n$ CVS sur $D := [1,+\infty[$.
2. — Montrer que $\sum_n u_n$ ne CVN pas sur D.
   — Soit $n \geqslant 3$. La fonction u_n est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $u_n' : x \mapsto \frac{1}{\ln n}x^{n-1}(1 - n\ln x)$. Donc u_n atteint son maximum en $e^{1/n}$. Donc $||u_n||_{[1,+\infty[} = u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{e}\frac{1}{n\ln n}$. Par comparaison série-intégrale, $\sum_n \frac{1}{n\ln n}$ DV. Donc $\sum_n u_n$ ne CVN pas sur $[1,+\infty[$.
3. — Soit $x > 1$ et $N \geqslant 2$. Montrer que

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{\ln(N+1)}.$$

   — On a $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \frac{\ln x}{\ln(N+1)} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{\ln x}{\ln(N+1)} \frac{1}{x^n(x-1)}$. Or $\ln x \leqslant x - 1$ et $1/x^n \leqslant 1$ donc $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(N+1)}$.
4. — Montrer que la somme de $\sum_n u_n$ est continue sur D.
   — Pour tout n, u_n est continue. La série $\sum_n u_n$ CVS sur D et, par la question précédente, la suite de ses restes CVU sur $[1,+\infty[$. Donc $\sum_n u_n$ CVU sur $[1,+\infty[$ et sa somme est continue sur cet intervalle.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Énoncer le théorème de dérivation d'une série de fonctions.
— Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui CVS sur un intervalle I telle que $\sum_n f_n'$ CVU sur I.
La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_n f_n'$.

3.2 Application

— Montrer que la somme de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donner sa dérivée.

— Pour tout n on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_n f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$.
Pour tout n et $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$. Soit $a > 0$. On a, pour tout n, $||f_n||_{[-a,a]} \leqslant \frac{2a}{n^4}$. Donc $\sum_n f_n'$ CVN sur tout compact de $\mathbb{R}$. Donc la somme de $\sum_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\sum_n f_n'$.

3.3 Exercices

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(1+e^{-nx}) \end{array} \right. .$$

1. — Étudier la convergence de la suite $(f_n)_n$.
   — La suite $(f_n)_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+$ vers $x \mapsto x$ et pas en d'autres points.
   Pour tout n on note $\delta_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f_n(x) - x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $\delta'(x) = e^{-nx}(1-nx)$ donc δ_n est croissante sur $[0, 1/n]$ et décroissante sur $[1/n, +\infty[$. Donc $||\delta_n||_{\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{n}e^{-1}$ donc $(f_n)_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.
2. — Étudier la limite de $\left(\int_0^1 f_n\right)_n$.
   — La suite $(f_n)_n$ CVU sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f_n \longrightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x\sqrt{n}} \end{array} \right. .$$

1. — Déterminer le domaine D de CVS de $\sum_n f_n$.
   — Si $x \leqslant 0$, la série $\sum_n f_n(x)$ DV grossièrement. Si $x > 0$, $f_n(x) = o(1/n^2)$ donc $\sum_n f_n(x)$ CVN donc CV. Donc $\sum_n f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. — La somme f de $\sum_n f_n$ est-elle continue sur D ?
   — Pour tout n, f_n est continue. Soit $a > 0$. Pour tout n, $||f_n||_{[a,+\infty[} \leqslant e^{-a\sqrt{n}}$. Donc $\sum_n f_n$ CVN donc CVU sur $[a, +\infty[$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. — Étudier la limite de f en $+\infty$.
   — On a $\lim_{+\infty} f_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$. Or $\sum_n f_n$ CVU sur $[1, +\infty[$ donc, par le théorème de la double limite, $\lim_{+\infty} f = 1$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\int_x^{x+1/n} f(t)\,dt \end{array} \right. .$$

— Étudier la convergence de $(f_n)_n$.
— Par le théorème fondamental de l'analyse $(f_n)_n$ CVS vers f sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant 1/\alpha$.
Soit $n \leqslant n_0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $|f_n(x) - f(x)| = \left|n\int_x^{x+1/n}(f(t) - f(x))\,dt\right| \leqslant n\int_x^{x+1/n} \varepsilon = \varepsilon$.
Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $||f_n - f||_{\mathbb{R}} \leqslant \varepsilon$.
Finalement $(f_n)_n$ CVU vers f sur $\mathbb{R}$.