BASES DUALES ET ANTÉDUALES

Antoine Médoc

Résumé. — Ceci est un document adapté à un niveau licence et donne des exemples de méthodes pour manipuler des bases duales et antéduales.

1. Les résultats

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et E^* son espace dual. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker associé.

Proposition 1.1. — *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$. La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de e si, et seulement si,*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Soit $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e.

Proposition 1.2. — *Pour tout vecteur $u \in E$,*

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u) e_i.$$

Pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*.$$

En pratique, la première formule permet de trouver la base duale e^* d'une base e donnée. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E. Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$, on note $\det_f(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans la base f.

Proposition 1.3. — *Soit* $d := \det_f(e_1, \dots, e_n)$. *Le réel* d *est non nul et, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $x_i \in E$,

$$e_i^*(x_i) = \frac{1}{d}\det_f(e_1, \dots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

Soient $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ la base duale de f, $P_{e\to f}$ la matrice de passage de e à f et $P_{e^*\to f^*}$ la matrice de passage de e^* à f^*. On note A^T la transposée d'une matrice A et I_n la matrice identité d'ordre n.

Proposition 1.4. — *La matrice de passage de* f^* *à* e^* *est* $(P_{e\to f})^T$, *i.e.*

$$(P_{e^*\to f^*})^T P_{e\to f} = \mathrm{I}_n\,.$$

En pratique, si E est $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, cette formule appliquée avec e la base canonique permet de trouver la base antéduale f d'une base de formes linéaires f^* donnée.

Démonstration. — On note $P_{e\to f} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $P_{e^*\to f^*} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Par définition, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{cases} f_j &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i, \\ f_j^* &= \sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i^*. \end{cases}$$

Ainsi, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &= f_i^*(f_j) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i} e_k^*(f_j) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i} \sum_{l=1}^n a_{l,j} e_k^*(e_l) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{k,j}. \end{aligned}$$

Finalement, comme $\mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $(P_{e^*\to f^*})^T P_{e\to f} = \mathrm{I}_n$. □

Remarque 1.5. — Soients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $(L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^n$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

2. La famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et sa base duale est la famille de formes linéaires $(P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto P(\alpha_i) \in \mathbb{R})_{i\in[\![1,n]\!]}$.

2. Exemples

Exemple 2.1. — Déterminer la base antéduale de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ donnée par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \varphi_1(x,y,z) & = x + 25y + z, \\ \varphi_2(x,y,z) & = 3x - y - 5z, \\ \varphi_3(x,y,z) & = x + 6y - 3z. \end{cases}$$

Une solution. — On note $f = (f_1, f_2, f_3)$ la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ sa base duale. Remarquons que

$$\begin{cases} \varphi_1 & = e_1^* + 25e_2^* + e_3^*, \\ \varphi_2 & = 3e_1^* - e_2^* - 5e_3^*, \\ \varphi_3 & = e_1^* + 6e_2^* - 3e_3^*. \end{cases}$$

La matrice de passage de e^* à $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est donc la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 25 & -1 & 6 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse de la transposée est

$$(B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{33}{152} & \frac{81}{152} & \frac{-31}{38} \\ \frac{1}{38} & \frac{-1}{38} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalement, par la proposition 1.4,

$$\begin{cases} f_1 & = (33/152, 1/38, 1/8), \\ f_2 & = (81/152, -1/38, 1/8), \\ f_3 & = (-31/38, 1/19, -1/2). \end{cases}$$

□

Exemple 2.2. — Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1. Déterminer la base duale de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Déterminer la base antéduale de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ telle que, pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$,

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(i) \end{array} \right. .$$

Une solution. — On note $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ sa base duale.

1. Par la première équation de la proposition 1.2, pour tous $i \in [\![1, 4]\!]$ et $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$,

$$e_i^*(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0) = a_i.$$

2. On note $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Remarquons que, pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, $\varphi_i = e_1^* + ie_2^* + i^2e_3^* + i^3e_4^*$. La matrice de passage de e^* à $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est donc la matrice
$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$
dont l'inverse de la transposée est
$$(B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ \frac{-13}{3} & \frac{19}{2} & -7 & \frac{11}{6} \\ \frac{3}{2} & -4 & \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$
Finalement, par la proposition 1.4,
$$\begin{cases} f_1 & = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{13}{3}X + 4, \\ f_2 & = \frac{1}{2}X^3 - 4X^2 + \frac{19}{2}X - 6, \\ f_3 & = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{7}{2}X^2 - 7X + 4, \\ f_4 & = \frac{1}{6}X^3 - X^2 + \frac{11}{6}X - 1. \end{cases}$$

2.bis *On donne ici une autre solution pour la question 2.* Les réels $1, 2, 3, 4$ sont deux à deux distincts donc, par la remarque 1.5, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]^*$ de base antéduale (f_1, f_2, f_3, f_4) donnée par, pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$,
$$f_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - j}{i - j}.$$
Finalement,
$$\begin{cases} f_1 & = -\frac{1}{6}(X-2)(X-3)(X-4), \\ f_2 & = \frac{1}{2}(X-1)(X-3)(X-4), \\ f_3 & = -\frac{1}{2}(X-1)(X-2)(X-4), \\ f_4 & = \frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3). \end{cases}$$

□

---

13 mai 2024

ANTOINE MÉDOC, Université de Montpellier
E-mail : antoine.medoc@umontpellier.fr