

# Modélisation de la dynamique d'un plongeur

Pierre Le Scornet, sous la direction de A. Debussche et E. Faou  
ENS Rennes, INRIA

20 mai - 20 juillet 2018



FIGURE 1 – Prise d’élán, plongeon synchronisé, Coupe du monde de plongeon FINA, 5 juin 2018, Wuhan, Chine <sup>1</sup>

## Résumé

L’objet de ce stage est la modélisation du comportement d’un plongeur, en utilisant une approche mathématique et numérique du système d’équations différentielles partielles de Timoshenko. Ce stage fait partie du programme *Sciences 2024*<sup>2</sup>, visant à augmenter les performances des athlètes français aux Jeux Olympiques de Paris 2024.

---

1. Les athlètes chinois Cao Yuan (devant) et Xie Siyi ont participé à la finale du plongeon 3m synchronisé, qu’ils ont remportée. (Crédit Image : Xiao Yijiu/Xinhua via ZUMA Wire)

2. <https://sciences2024.polytechnique.fr/>

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Équation des ondes avec contact ponctuel</b>	<b>5</b>
2.1	Théorème d'existence . . . . .	5
2.2	Preuve du théorème . . . . .	6
2.2.1	Introduction à la preuve . . . . .	6
2.2.2	Premier lemme de bornage . . . . .	7
2.2.3	Preuve du premier lemme . . . . .	7
2.2.4	Première convergence en $m$ . . . . .	10
2.2.5	Second lemme de bornage . . . . .	13
2.2.6	Preuve du second lemme . . . . .	13
2.2.7	Passage à la limite en $\epsilon$ . . . . .	14
2.2.8	Conclusion de la preuve . . . . .	15
2.3	Remarques additionnelles . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Construction d'un schéma numérique</b>	<b>16</b>
3.1	Cas de l'équation des ondes sans obstacle . . . . .	16
3.1.1	Définition du schéma numérique . . . . .	16
3.1.2	Solutions numériques et courbes d'erreur . . . . .	18
3.2	Cas de l'équation des ondes avec obstacle . . . . .	19
3.2.1	Définition de schémas numériques . . . . .	19
3.2.2	Résultats numériques . . . . .	21
3.3	Cas du système d'équation de Timoshenko . . . . .	23
3.3.1	Définition du schéma numérique sans contact ponctuel	23
3.3.2	Définition du schéma numérique avec contact ponctuel	24
3.3.3	Résultats numériques . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Problèmes ouverts</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>28</b>
5.1	Script Python pour l'équation des ondes . . . . .	28
5.2	Script Python pour Timoshenko . . . . .	29

# Introduction

## Contexte du stage

Ce stage fait partie d'un programme de recherche avec des stages étudiants et des thèses, entre l'Université Rennes 1 et l'École normale Supérieure de Rennes. Trois stages se sont déroulés avec chacun une approche différente : un étudiant du département mécatronique a travaillé à instrumenter et analyser un modèle réduit puis un modèle taille réelle de plongeur, un étudiant en master de modélisation a appliqué des méthodes d'analyse modale sur le système différentiel de Timoshenko, et j'ai étudié l'existence d'une solution à l'équation des ondes avec contact ponctuel par une méthode variationnelle, puis construit un schéma numérique pour l'équation des ondes, que j'ai ensuite adapté au modèle de Timoshenko.

## Plan du rapport

Je commence dans la première partie par présenter le problème du plongeur, le modèle de Timoshenko de déformation des poutres, et comment l'adapter au problème du plongeur. Ensuite, je présente une preuve variationnelle par pénalisation de l'existence d'une solution à l'équation des ondes avec contact ponctuel. Enfin, je présente un schéma numérique résolvant l'équation des ondes avec contact ponctuel, et son adaptation aux équations de Timoshenko.

## 1 Présentation du problème



FIGURE 2 – Schéma d'un plongeur

On considère un plongeur de longueur  $L$ . Ce plongeur est accroché à gauche à un support fixe, est libre à droite, et est limité vers le bas dans son déplacement au point  $0 < l < L$  par un contact ponctuel<sup>3</sup>. On considère le mouvement du plongeur comme plan, i.e. on néglige la torsion du plongeur.

---

3. Ce sera le même schéma quand on considérera l'équation des ondes.

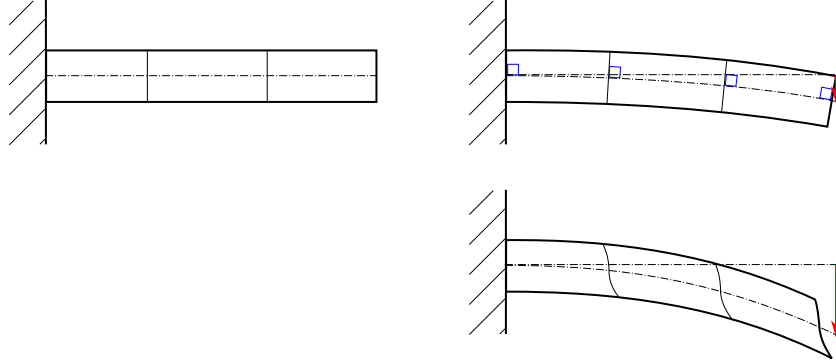


FIGURE 3 – Schéma de la fibre moyenne et de la section droite d'une poutre

On note  $u(x, t)$  le *déplacement* vertical de la fibre moyenne du plongeur. Au repos, on peut définir une section droite au long de la fibre moyenne comme la section de la poutre orthogonale à la fibre moyenne. On a alors deux façons de modéliser la dynamique de la poutre :

- le modèle d'Euler-Bernoulli, qui suppose que la section droite reste orthogonale à la fibre moyenne au cours du temps, correspondant au premier schéma de déformation.
- le modèle de Timoshenko, qui prend en compte le cisaillement : si la section droite reste plane, elle est cependant inclinée par rapport au plan orthogonal à la fibre moyenne. On note cet angle  $\theta(x, t)$  le *cisaillement*. Alors, l'équation différentielle partielle de Timoshenko s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} + f(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right)^2 u \\ g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{cases}$$

Ce modèle fonctionne mieux pour des petites elongations comme celle que nous avons que le modèle de Bernoulli.

À partir de maintenant, on notera  $\frac{\partial g}{\partial x} = g'$  et  $\frac{\partial g}{\partial t} = \dot{g}$ . On négligera  $\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right)^2 u$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \theta' + f \\ \ddot{\theta} &= g\theta'' + u' - \theta \end{aligned}$$

On fixe les conditions limites à :

$$\begin{aligned} \text{En } x = 0, u = 0, \theta' = 0 \\ \text{En } x = L, u' - \theta = 0, \theta' = 0 \end{aligned}$$

Ces conditions limites viennent de la structure physique de la poutre sous le modèle de Timoshenko : les deux forces s'appliquant à la poutre sont une force de cisaillement  $\vec{N} = u' - \theta$  indiquant la force s'exerçant verticalement sur la poutre, et un moment de flexion  $\vec{M} = \theta'$  indiquant la force tordant la section droite de la poutre par rapport au plan orthogonal à la fibre moyenne. Ainsi, à droite la poutre est libre, donc les forces sont nulles, et à gauche seule la force de flexion est nulle, puisque le déplacement est constant.

## 2 Équation des ondes avec contact ponctuel

### 2.1 Théorème d'existence

[Sch80] propose un théorème d'existence de solution de l'équation des ondes avec contact ponctuel, avec la structure d'une démonstration de ce théorème. Notons  $\square$  l'opérateur d'Alembertien,  $\Omega = ]0, L[$ ,  $\mathcal{Q} = ]0, L[ \times ]0, T[$ ,  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$ , et  $(u, v) = \int_0^L uv dx$ .

On va travailler dans l'espace

$$\mathcal{K} = \{u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; H) / u(l, t) \geq h_0\}$$

Nous avons besoin de formuler l'équation des ondes avec un contact ponctuel. Pour cela, nous allons prouver qu'il existe une solution à l'inégalité variationnelle :

$$\forall v \in \mathcal{K}, \langle \square u, v - u \rangle \geq \int_{\mathcal{Q}} f(v - u)$$

**Théorème 2.1** (Résolution par méthode variationnelle). *Pour tout  $u_0$  dans  $V$  tel que  $u_0(l) \geq 0$ , et pour tout  $u_1$  dans  $H$ ,  $f$  dans  $L^2(\mathcal{Q})$ , il existe une fonction  $u$  telle que :*

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{K} \\ \square u &\in M^1(\overline{\mathcal{Q}}) \\ \ddot{u} \upharpoonright_{(0, l) \times (0, T)} &\in L^2(0, T; H^{-1}(0, l)) \\ \ddot{u} \upharpoonright_{(l, L) \times (0, T)} &\in L^2(0, T; H^{-1}(l, L)) \\ \forall v \in \mathcal{K}, \langle \square u, v - u \rangle &\geq \int_{\mathcal{Q}} f(v - u) dx dt \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$\dot{u}(x, 0) = u_1(x)$$

## 2.2 Preuve du théorème

### 2.2.1 Introduction à la preuve

On utilise une méthode variationnelle et de la *pénalisation*. D'abord, soit  $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée de  $V$ , formée de vecteurs propres du Laplacien nuls en 0 et  $L$ . Notons  $V_m = Vect(w_1, \dots, w_m)$ , et  $p_m$  la projection sur  $V_m$ . On étudie le système différentiel :

$$u_{\epsilon m}(\cdot, t) \in V_m$$

$$\forall 1 \leq j \leq m, u_{\epsilon m}''(\cdot, t), w_j) + a(u_{\epsilon m}(\cdot, t), w_j) - \frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon m}(l, t))^- w_j(l) = (f(\cdot, t), w_j) \quad (2)$$

$$u_{\epsilon m}(x, 0) = u_m^0$$

$$\dot{u}_{\epsilon m}(x, 0) = u_m^1$$

où  $u_m^0$  et  $u_m^1$  sont des conditions initiales telles que  $u_m^0$  converge vers  $u_0$  dans  $V$ ,  $u_m^1$  converge vers  $u_1$  dans  $H$  et  $u_m^0(l) \geq 0$ .

Ce système différentiel est la traduction de l'équation des ondes non homogène, auquel on rajoute le terme de pénalisation  $\frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^-$ . Il a une solution par le théorème de Cauchy-Lipshitz-Picard ([Bre83], VII.3) :

**Théorème 2.2** (Cauchy-Lipshitz-Picard). *Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $F : E \rightarrow E$  une application telle que :*

$$\|Fu - Fv\| \leq L \|u - v\| \quad \forall u, v \in E \quad (L \geq 0)$$

*Alors pour tout  $u_0 \in E$  il existe une unique fonction  $u \in C^1([0; \infty[; E)$  telle que :*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Fu \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

puisque la partie négative  $(\cdot)^-$  est lipschitzienne. Remarquons que (2) peut se réécrire en sommant :

$$\square u_{\epsilon m} = p_m f + \frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- p_m \delta_l$$

avec  $\langle p_m \delta_l, \phi \rangle_{V',V} := p_m \phi(l)$ .

On va montrer des bornes sur  $u_{\epsilon m}$  et ses dérivées, puis on va faire tendre une sous-suite selon  $m$  vers une fonction  $u_\epsilon$ , en passant des bornes à la limite, et enfin nous passerons une sous-suite à la limite selon  $\epsilon$  vers  $u$  qui respectera les conditions du théorème.

### 2.2.2 Premier lemme de bornage

*Lemme 2.1.* Nous pouvons contrôler  $u_{\epsilon m}$  :

$$\begin{aligned} |u_{\epsilon m}|_{L^\infty(0,T;V)} &\leq C \\ |\dot{u}_{\epsilon m}|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq C \\ \left| \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- \right|_{L^\infty(0,T)} &\leq C \\ |\ddot{u}_{\epsilon m}|_{L^2(0,T;V')} &\leq C(\epsilon) \\ \int_0^T \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- dt &\leq C \\ |\square u_{\epsilon m}|_{M^1(\mathcal{Q})} &\leq C \end{aligned}$$

Ces constantes sont indépendantes de  $m$  et  $\epsilon$  (sauf la quatrième qui ne dépend que de  $\epsilon$ ).

### 2.2.3 Preuve du premier lemme

On peut commencer par une estimation d'énergie.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L (\dot{u}_{\epsilon m})^2 + (u'_{\epsilon m})^2 dx &= \int_0^L \dot{u}_{\epsilon m} \ddot{u}_{\epsilon m} + \dot{u}'_{\epsilon m} u'_{\epsilon m} \\ &= (\ddot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t) - u''_{\epsilon m}(\cdot, t), \dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t))_{L^2(\Omega)} \\ &= (f(\cdot, t), \dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t))_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \dot{u}_{\epsilon m}(l, t) \end{aligned}$$

On a utilisé une intégration par partie sur le deuxième terme, en utilisant  $u_{\epsilon m}(\cdot, t) \in V = H_0^1(\Omega)$ , puis que  $\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t) \in V_m$ . Or  $\frac{\partial}{\partial t} [(u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^-]^2 = 2(u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \dot{u}_{\epsilon m}(l, t)$ , donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^L (\dot{u}_{\epsilon m})^2 + (u'_{\epsilon m})^2 dx + \frac{1}{\epsilon} [(u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^-]^2 \right) &= (f(\cdot, t), \dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t))_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} (|f(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)}^2) \end{aligned}$$

On utilise le fait que chacun des termes est positif pour obtenir :

$$|\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)}^2 - |u_m^0|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |f|_{L^2(\mathcal{Q})} + \int_0^t |\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

Or  $(u_m^0)_m$  est borné dans  $L^2(\Omega)$ , donc on a :

$$|\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K + \int_0^t |\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

avec  $K = |u_m^0|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|_{L^2(\mathcal{Q})}^2$ . On applique donc le lemme de Grönwall et on obtient :

$$|\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K e^t \leq K e^T$$

On a donc majoré  $\dot{u}_{\epsilon m}$  par une constante indépendante de  $m$  et  $\epsilon$  dans  $L^\infty(0, T; H)$ . Or on peut écrire  $u_{\epsilon m}(\cdot, t) - u_m^0 = \int_0^t \dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, s) ds$  qui nous donne directement  $u_{\epsilon m}$  borné dans  $L^\infty(0, T; H)$  et donc  $L^\infty(0, T; V)$  indépendamment de  $m$  et  $\epsilon$ . De même :

$$\frac{1}{\epsilon} [(u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^-]^2 \leq |f|_{L^2(\mathcal{Q})} + T |\dot{u}_{\epsilon m}|_{L^\infty(0, T; V)}$$

donc  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^-$  est borné indépendamment de  $m$  et  $\epsilon$  (et  $t$ ).

Bornons maintenant  $\ddot{u}_{\epsilon m}$  dans  $L^2(0, T; V')$ . Pour cela, remarquons que l'on peut interpréter (2) comme une égalité sur  $V'$ . Pour contrôler  $\ddot{u}_{\epsilon m}$  dans  $V'$ , on peut donc contrôler  $u''_{\epsilon m}$ ,  $f$  et  $\frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- p_m \delta_l$ .

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot, t), \phi \rangle_{V', V} &= \int_0^L f(\cdot, t) \phi \\ &\leq |f(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)} |\phi|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |f(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)} |\phi|_V \end{aligned}$$

Donc

$$|f|_{L^2(0, T; V')} \leq |f|_{L^2(\mathcal{Q})}$$

— De même, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\langle u''_{\epsilon m}(\cdot, t), \phi \rangle_{V', V} &= \int_0^L u''_{\epsilon m}(\cdot, t) \phi \\
&= - \int_0^L u'_{\epsilon m}(\cdot, t) \phi' \\
&\leq |u'_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)} |\phi'|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |u_{\epsilon m}(\cdot, t)|_V |\phi|_V
\end{aligned}$$

Donc nous avons :

$$|u''_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{V'} \leq |u_{\epsilon m}(\cdot, t)|_V$$

qui est borné selon  $t$  d'où :

$$|u''_{\epsilon m}|_{L^2(0, T; V')} \leq \sqrt{T} |u_{\epsilon m}|_{L^\infty(0, T; V)}$$

— Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(\cdot, t) - h_0)^- p_m \delta_l, \phi \rangle_{V', V} &= \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \phi(l) \\
&= \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \int_0^l \phi'(x) dx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \sqrt{l} |\phi'|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \sqrt{l} |\phi|_V
\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, d'où :

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- p_m \delta_l|_{V'} &\leq \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- \\
|\frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- p_m \delta_l|_{L^2(0, T; V')} &\leq |\frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^-|_{L^\infty(0, T)}
\end{aligned}$$

Les trois bornes  $L^2(0, T; V')$  ne dépendent pas de  $m$  (la dernière dépend de  $\epsilon$  puisque c'est  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- p_m \delta_l$  que l'on a borné, et non pas  $\frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- p_m \delta_l$ ). On a donc  $\ddot{u}_{\epsilon m}$  borné dans  $L^2(0, T; V')$ , indépendamment de  $m$ . On cherche maintenant à borner  $\int_0^T \frac{1}{\epsilon} u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- dt$ . Pour cela, notons que  $w_1(l) \neq 0$  et utilisons (2) pour  $j = 1$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^- dt &= \frac{1}{w_1(l)} \int_0^T (f(\cdot, t), w_1) - (\ddot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t), w_1) \\
&\quad + (u''_{\epsilon m}(\cdot, t), w_1) dt
\end{aligned}$$

Le premier terme à droite est constant selon  $m$  et  $\epsilon$ . De plus, par linéarité on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (\ddot{u}_{\epsilon m}(\cdot, t), w_1) dt \right| &= |(\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, T) - \dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, 0), w_1)| \\ &\leq |\dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, T) - \dot{u}_{\epsilon m}(\cdot, 0)|_{L^2(\Omega)} |w_1|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\sqrt{L} |u_{\epsilon m}|_{L^\infty(0, T; V)} \end{aligned}$$

Enfin, on a par intégrations par parties, pour  $\lambda_1$  la valeur propre associée à  $w_1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_{\epsilon m}''(\cdot, t), w_1) dt &= \int_0^T (u_{\epsilon m}(\cdot, t), w_1'') dt \\ &= \int_0^T \lambda_1 (u_{\epsilon m}(\cdot, t), w_1) dt \\ \left| \int_0^T (u_{\epsilon m}''(\cdot, t), w_1) dt \right| &\leq |\lambda_1| \int_0^T |u_{\epsilon m}(\cdot, t)|_{L^2(\Omega)} |w_1|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq T |\lambda_1| |u_{\epsilon m}|_{L^\infty(0, T; V)} \end{aligned}$$

Cette borne ne dépend pas de  $m$  et  $\epsilon$ . Ainsi, nous pouvons borner  $\int_0^T \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, t) - h_0)^-$  indépendamment de  $\epsilon$  et  $m$ .

On peut enfin montrer que  $\square u_{\epsilon m}$  est une mesure bornée sur  $\mathcal{Q}$  :

$$\square u_{\epsilon m} = f - \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^- p_m \delta_l$$

Or,  $f$  est une mesure bornée car  $\int_{\mathcal{Q}} f \leq \sqrt{LT} \|f\|_{L^2(\mathcal{Q})}$ , que  $\frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m}(l, \cdot) - h_0)^-$  est borné et que  $p_m \delta_l$  est une mesure finie. De plus, cette borne est indépendante de  $m$  et  $\epsilon$ .

#### 2.2.4 Première convergence en $m$

Nous pouvons maintenant passer à la limite en  $m$ . Pour cela, considérons  $(u_{\epsilon m})_{m \in \mathbb{N}}$ . Nous savons que

$$|\dot{u}_{\epsilon m}|_{L^\infty(0, T; H)} \leq C$$

donc

$$|u_{\epsilon m}(\cdot, t) - u_{\epsilon m}(\cdot, s)|_{L^2(\Omega)} \leq C|t - s| \quad \forall t, s \in [0, T]$$

Ainsi,  $(u_{\epsilon m})_{m \in \mathbb{N}}$  est équicontinue. De plus,  $u_{\epsilon m}$  est continue en  $t$ , et  $[0, T]$  est compact, donc  $u_{\epsilon m}([0, T])$  est compact. On a donc par le théorème d'Ascoli :

**Théorème 2.3** (Ascoli). *Soit  $K$  un espace métrique compact et soit  $\mathcal{H}$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{C}(K)$ . On suppose que  $\mathcal{H}$  est uniformément équicontinu i.e. :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{H}, d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

que  $(u_{\epsilon m})_{m \in \mathbb{N}}$  relativement compact dans  $\mathcal{C}([0, T], H)$ . Il existe donc une sous-suite convergente

$$u_{\epsilon m_k} \rightarrow u_\epsilon \text{ dans } \mathcal{C}([0, T], H)$$

On peut maintenant passer à la limite dans chacun des termes de l'équation (2). D'abord,

$$|a(u_{\epsilon m}(\cdot, t), w_j)| \leq LT |u_{\epsilon m}(\cdot, t)|_H |w_j''|_H \quad \forall t \in [0, T]$$

par intégration par parties, d'où

$$a(u_{\epsilon m_k}(\cdot, t), w_j) \rightarrow a(u_\epsilon(\cdot, t), w_j) \quad \forall t \in [0, T]$$

Ensuite, on veut prouver

$$u_{\epsilon m_k}(l, t) \rightarrow u_\epsilon(l, t) \quad \forall t \in [0, T]$$

pour faire converger le troisième terme à gauche de (2). Pour cela, nous savons que  $\forall t \in [0, T], |u_{\epsilon m_k}(\cdot, t)|_V \leq C$ , et que  $V$  s'injecte de manière compacte dans  $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ . On a donc pour tout  $t \in [0, T]$   $(u_{\epsilon m_k}(\cdot, t))_{k \in \mathbb{N}}$  équicontinue et  $u_{\epsilon m_k}(\Omega, t)$  compact (par continuité et compacité de  $\Omega$ ). On a donc, par le théorème d'Ascoli 2.3 sur  $\Omega, \mathbb{R}$  et  $u_{\epsilon m_k}(\cdot, t)$ , il existe une sous-suite convergant vers  $v$  :

$$u_{\epsilon m_{k_l}}(\cdot, t) \rightarrow v(\cdot, t) \text{ avec } v(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Or, on sait déjà que  $u_{\epsilon m_k} \rightarrow u_\epsilon$  dans  $\mathcal{C}([0, T], H)$ , donc cette limite est la même :

$$v(\cdot, t) = u_\epsilon(\cdot, t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Par continuité, la valeur ponctuelle de  $u_{\epsilon m_k}(\cdot, t)$  a bien un sens et converge vers  $u_\epsilon(l, t)$ . Ainsi :

$$\frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon m_k}(l, t) - h_0)^- w_j(l) \rightarrow \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon(l, t) - h_0)^- w_j(l) \quad \forall t \in [0, T]$$

Enfin, on sait que la suite  $\ddot{u}_{\epsilon m_k}$  est bornée dans  $L^2(0, T; V')$ . Ainsi, par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki ([Bre83], III.15) :

**Théorème 2.4** (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Pour  $E$  espace de Banach, l'ensemble  $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$  est compact pour la topologie faible-\**.

$\ddot{u}_{em_k}$  est relativement compacte dans  $L^2(0, T; V')$ . Ainsi, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers  $w_\epsilon$  dans  $L^2(0, T; V')$ . Or,  $w_\epsilon = \ddot{u}_\epsilon$ , car pour tout  $g \in \mathcal{C}^2([0, T]; V)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \ddot{u}_{em_k}(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle_{V', V} dt &= \int_0^T \langle u_{em_k}(\cdot, t), \ddot{g}(\cdot, t) \rangle_{V', V} dt \\ &\rightarrow \int_0^T \langle u_\epsilon(\cdot, t), \ddot{g}(\cdot, t) \rangle_{V', V} dt \\ &= \int_0^T \langle \ddot{u}_\epsilon(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle_{V', V} dt \end{aligned}$$

On peut donc passer à la limite (2) selon  $k$ , et on obtient une égalité dans  $L^2(0, T, V')$ . De même, on peut la sommer pour obtenir :

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\epsilon(\cdot, t), w) + a(u_\epsilon(\cdot, t), w) + \frac{1}{\epsilon}(u_\epsilon(l, t) - h_0)^- w(l) &= (f(\cdot, t), w) \\ \forall w \in V_m, \forall m \in \mathbb{N} &\quad (3) \end{aligned}$$

On peut maintenant fermer  $V_m$  : pour cela, soit  $w \in V$ , et  $w^n$  une suite de  $\cup_m V_m$  convergeant dans  $V$  vers  $w$ . Alors, on peut montrer la convergence de chaque terme de (3).

- Le dernier terme en  $f$  converge par continuité du produit scalaire sur  $V$ .
- 

$$\begin{aligned} |a(u_\epsilon(\cdot, t), w^n) - a(u_\epsilon(\cdot, t), w)| &= |a(u_\epsilon(\cdot, t), w^n - w)| \\ &\leq C |u'_\epsilon(\cdot, t)|_H |w^n - w|_H \\ &\leq C |u_\epsilon(\cdot, t)|_V |w^n - w|_V \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

- De même :

$$\frac{1}{\epsilon}(u_\epsilon(l, t) - h_0)^- w^n(l) \rightarrow \frac{1}{\epsilon}(u_\epsilon(l, t) - h_0)^- w(l)$$

car la convergence dans  $V = H_0^1(\Omega)$  implique la convergence ponctuelle.

— Enfin :

$$\begin{aligned} |(\langle \ddot{u}_\epsilon(\cdot, t), w^n \rangle_{V',V} - \langle \ddot{u}_\epsilon(\cdot, t), w \rangle_{V',V})| &= |\langle \ddot{u}_\epsilon(\cdot, t), w^n - w \rangle_{V',V}| \\ &\leq |\ddot{u}_\epsilon(\cdot, t)|_{V'} |w^n - w|_V \end{aligned}$$

On a donc ici la convergence dans  $L^2(0, T)$ . Ainsi, on a l'égalité dans  $L^2(0, T; V')$  :

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\epsilon(\cdot, t), w) + a(u_\epsilon(\cdot, t), w) + \frac{1}{\epsilon}(u_\epsilon(l, t) - h_0)^- w(l) &= (f(\cdot, t), w) \\ \forall w \in V & \quad (4) \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi montrer la convergence faible-\* de  $u_{\epsilon m_k}$  dans  $L^\infty(0, T; V)$ . Soit  $g \in L^1(0, T; V')$ . Par convergence dominée, avec la borne  $L^\infty(0, T; V)$  sur  $u_{\epsilon, m_k}$ , on obtient :

$$\int_0^T \langle g(\cdot, t), u_{\epsilon m_k}(\cdot, t) \rangle_{V',V} dt \rightarrow \int_0^T \langle g(\cdot, t), u_\epsilon(\cdot, t) \rangle_{V',V} dt$$

De même,  $\dot{u}_{\epsilon m_k}$  converge faiblement-\* vers  $\dot{u}_\epsilon$ .

### 2.2.5 Second lemme de bornage

*Lemme 2.2.* On peut passer certaines bornes à la limite :

$$\begin{aligned} |u_\epsilon|_{L^\infty(0, T; V)} &\leq C \\ |\dot{u}_\epsilon|_{L^\infty(0, T; H)} &\leq C \\ |\square u|_{M^1(\mathcal{Q})} &\leq C \end{aligned}$$

### 2.2.6 Preuve du second lemme

— Un des corollaires du théorème de Hahn-Banach nous dit que pour  $X$   $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, et  $h \in X$  :

$$|h|_X = \sup_{g \in X', |g|_{X'}=1} |\langle g, h \rangle_{X', X}|$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
|u_\epsilon|_{L^\infty(0,T;V)} &= \sup_{g \in L^1(0,T;V'), |g|_{L^1(0,T;V')}=1} \langle g, u_\epsilon \rangle_{L^1(0,T;V'), L^\infty(0,T;V)} \\
&= \sup_g \int_0^T \langle u_\epsilon(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle dt \\
&= \sup_g \lim_k \int_0^T \langle u_{\epsilon m_k}(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle dt \\
&\leq \sup_g \sup_k |u_{\epsilon m_k}|_{L^\infty(0,T;V)} |g|_{L^1(0,T;V')} \\
|u_\epsilon|_{L^\infty(0,T;V)} &\leq C
\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de  $\epsilon$ .

— De la même manière, on peut borner  $\dot{u}_\epsilon$  dans  $L^\infty(0, T; H)$ .

$$\begin{aligned}
|\dot{u}_\epsilon|_{L^\infty(0,T;H)} &= \sup_{g \in L^1(0,T;H'), |g|_{L^1(0,T;H')}=1} \langle g, \dot{u}_\epsilon \rangle_{L^1(0,T;H'), L^\infty(0,T;H)} \\
&= \sup_g \int_0^T \langle \dot{u}_\epsilon(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle dt \\
&= \sup_g \lim_k \int_0^T \langle \dot{u}_{\epsilon m_k}(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle dt \\
&\leq \sup_g \sup_k |\dot{u}_{\epsilon m_k}|_{L^\infty(0,T;H)} |g|_{L^1(0,T;H')} \\
|\dot{u}_\epsilon|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq C
\end{aligned}$$

— Enfin, de la même manière, on peut borner  $\square u_\epsilon$  dans  $M^1(\mathcal{Q})$ . En effet :

$$\square u_\epsilon = f - \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon(l, \cdot) - h_0)^- \delta_l$$

Or  $f \in M^1(\mathcal{Q})$ , et puisque  $\int_0^T \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon(l, t) - h_0)^- dt \leq C$ , la mesure  $\frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon(l, t) - h_0)^- \delta_l$  est finie.

### 2.2.7 Passage à la limite en $\epsilon$

Considérons  $(u_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ . Cette suite est équicontinue, puisque :

$$\begin{aligned}
|u_\epsilon(\cdot, t) - u_\epsilon(\cdot, s)| &= \left| \int_s^t \dot{u}_\epsilon(\cdot, z) dz \right| \\
&\leq |\dot{u}_\epsilon|_{L^\infty(0,T;H)} |t - s| \\
&\leq C |t - s|
\end{aligned}$$

De plus, on a prouvé que  $u_\epsilon \in \mathcal{C}(\mathcal{Q})$ , donc l'image de  $\mathcal{Q}$  compact par  $u_\epsilon$  est compacte. Alors, par le théorème d'Ascoli 2.3,  $(u_\epsilon)$  est relativement compacte dans  $\mathcal{C}([0, T], V)$ . Il existe donc une suite  $\epsilon_k \rightarrow 0$  telle que  $u_\epsilon$  converge dans  $\mathcal{C}([0, T], V)$  vers une fonction que l'on notera  $u$ . On peut aussi montrer que  $u_{\epsilon_k}$  converge faiblement-\* vers  $u$  dans  $L^\infty(0, T; V)$ . Pour cela, posons  $g \in L^1(0, T; V)$ . Par convergence dominée avec la borne  $L^\infty(0, T; V)$  sur  $u_\epsilon$ , on obtient :

$$\int_0^T \langle g(\cdot, t), u_{\epsilon_k}(\cdot, t) \rangle_{V', V} dt \rightarrow \int_0^T \langle g(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{V', V}$$

D'où la convergence faible-\*. Enfin, on peut utiliser le théorème d'Ascoli 2.3 par rapport à  $t$  pour montrer que  $u$  est dans  $\mathcal{C}(\mathcal{Q})$  et la convergence ponctuelle.

On peut montrer par une simple intégration par parties que  $\dot{u}_{\epsilon_k}$  converge vers  $\dot{u}$  dans  $L^\infty(0, T; H)$  au sens faible-\*. Enfin, on peut montrer la convergence de  $\square u_{\epsilon_k}$  vers  $\square u$  au sens faible-\* dans  $M^1(\mathcal{Q})$ . En effet,  $\square u_{\epsilon_k}$  est borné dans  $M^1(\mathcal{Q})$ , donc par le théorème de Banach-Alaoglu, la suite est compacte, donc une sous-suite que l'on nomme toujours  $\square u_{\epsilon_k}$  converge dans  $M^1(\mathcal{Q})$ . De plus, on peut écrire cette convergence au sens des distributions :

$$\begin{aligned} |\langle \square u_{\epsilon_k} - \square u, g \rangle_{M^1(\mathcal{Q}), \mathcal{C}(\mathcal{Q})}| &= |\langle \ddot{u}_{\epsilon_k} - u''_{\epsilon_k} + \ddot{u} - u'', g \rangle| \\ &= |\langle u_{\epsilon_k} - u, \ddot{g} - g'' \rangle| \\ &\leq |\ddot{g} - g''|_{\mathcal{C}(\mathcal{Q})} |u_{\epsilon_k} - u|_{M^1(\mathcal{Q})} \\ &\leq |\ddot{g} - g''|_{\mathcal{C}(\mathcal{Q})} T |u_{\epsilon_k} - u|_{L^\infty(0, T; V)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on sait que  $u_{\epsilon_k}$ ,  $\dot{u}_{\epsilon_k}$  et  $\square u_{\epsilon_k}$  convergent faiblement-\* vers  $u$ ,  $\dot{u}$ ,  $\square u$  dans  $L^\infty(0, T; V)$ ,  $L^\infty(0, T; H)$  et  $M^1(\mathcal{Q})$ .

### 2.2.8 Conclusion de la preuve

On peut donc prouver (1) :

$$(\square u_\epsilon - f, v - u_\epsilon) = \int_0^T \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon(l, t) - h_0)^- (v(l, t) - u_\epsilon(l, t)) dt \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

Or  $v \in \mathcal{K}$  donc presque partout en  $t$ , si  $u_\epsilon(l, t) \geq h_0$ , alors la partie négative est nulle et sinon  $v(l, t) \geq u_\epsilon(l, t)$  et la partie négative est positive, donc :

$$(\square u_\epsilon - f, v - u_\epsilon) \geq 0$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} (\square u_{\epsilon_k} - f, v - u_{\epsilon_k}) - (\square u - f, v - u) &= (\square u_{\epsilon_k} - \square u, v - u) \\ &\quad + (\square u_{\epsilon_k} - f, u - u_{\epsilon_k}) \end{aligned}$$

Or, le premier terme tend vers 0 car  $v - u \in \mathcal{C}(\mathcal{Q})$  et que  $\square u_{\epsilon_k}$  converge vers  $\square u$  faiblement-\*. Le deuxième terme tend vers 0 car

$$(\square u_{\epsilon_k} - f, u - u_{\epsilon_k}) \leq |\square u_{\epsilon_k} - f|_{M^1(\mathcal{Q})} |u - u_{\epsilon_k}|_{L^\infty(\mathcal{Q})} \rightarrow 0$$

Ainsi, nous avons :

$$(\square u_{\epsilon_k} - f, v - u_{\epsilon_k}) - (\square u_{\epsilon} - f, v - u) \rightarrow 0$$

D'où :

$$(\square u - f, v - u) \geq 0$$

□

### 2.3 Remarques additionnelles

Les autres conditions sont immédiates. On peut aussi montrer que le support de  $\square u - f$  est compris dans  $\{l\} \times [0, T]$ . Pour cela, il suffit de prendre  $v \in \mathcal{C}(\mathcal{Q})$  à support compact inclus dans  $]0, l[ \times [0, T]$ , et par convergence faible-\* dans  $M^1(\mathcal{Q})$  :

$$\begin{aligned} (\square u - f, v) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\square u_{\epsilon} - f, v) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon}(l, t) - h_0)^- v(l) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même pour  $v$  à support compact inclus dans  $]l, L[ \times [0, T]$ ,  $(\square u - f, v) = 0$ . Ainsi,  $\square u - f = \mu$ ,  $\mu$  étant une mesure positive à support dans  $\{l\} \times [0, T]$  puisque limite de  $\square u_{\epsilon_k} - f = \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon_k} - h_0)^- \delta_l$  qui est une mesure positive.

## 3 Construction d'un schéma numérique

### 3.1 Cas de l'équation des ondes sans obstacle

#### 3.1.1 Définition du schéma numérique

Nous cherchons à modéliser l'équation :

$$\square u = f \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
u(\cdot, 0) &= u_0 \\
\dot{u}(\cdot, 0) &= u_1 \\
u(0, \cdot) &= 0 \\
u'(L, \cdot) &= 0
\end{aligned}$$

par une méthode des différences finies. On va noter  $\Delta x$  le pas spatial,  $\Delta t$  le pas temporel,  $(n_x, n_t)$  la dimension du maillage utilisé (d'où  $n_x \Delta x = L$ ,  $n_t \Delta t = T$ ). On discrétise les dérivées par :

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(\cdot, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(\cdot, t + \Delta t) - 2u(\cdot, t) + 2u(\cdot, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \\
u''(x, \cdot) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, \cdot) - 2u(x, \cdot) + u(x - \Delta x, \cdot)}{\Delta x^2}
\end{aligned}$$

On peut alors initialiser le schéma numérique :

$$\begin{aligned}
U_j^0 &= u_0(j \Delta x) \\
U_j^1 &= u_0(j \Delta x) + \Delta t u_1(j \Delta x)
\end{aligned}$$

écrire le cœur du schéma numérique :

$$\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{\Delta t^2} = \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} + f(j \Delta x, k \Delta t)$$

On voit que l'on peut obtenir  $U_j^{k+1}$  grâce à  $U^k$  et  $U^{k-1}$ , en multipliant par  $\Delta t^2$  :

$$\begin{aligned}
U_j^{k+1} &= 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(k \Delta x, j \Delta t) \\
&\quad \forall k \in \llbracket 2, n_t - 1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n_x - 1 \rrbracket
\end{aligned}$$

et écrire les conditions limites :

$$\begin{aligned}
U_0^{k+1} &= U_0^{k-1} \\
U_{n_x}^{k+1} &= 2U_{n_x}^k - U_{n_x}^{k-1} + \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} (U_{n_x-1}^k - U_{n_x}^k)
\end{aligned}$$

On obtient la dernière équation en posant  $U_{n_x+1}^k = U_{n_x}^k$ , qui correspond à  $u'(L, \cdot) = 0$ .

Définissons le nombre de Courant :

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

La condition *CFL* (Courant–Friedrichs–Lewy) qui s’écrit sous la forme  $C \leq C_0 = 1$ , garantit la convergence du schéma numérique. On peut en trouver une preuve dans {Beca.

### 3.1.2 Solutions numériques et courbes d’erreur

Posons des conditions initiales :

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$u_1 = 0$$

Ces conditions initiales respectent bien les conditions aux limites. La solution exacte à (5) pour  $f = 0$  est alors :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{(x+t)\pi}{2L} + \sin \frac{(x-t)\pi}{2L} \right)$$

On peut calculer l’erreur  $\epsilon_n$  de ce schéma, dans le cas où  $n_x = n_t = n$ , qui est définie comme :

$$\epsilon_n = \sup_k |(U_j^k - u(j\Delta x, k\Delta t))_j|_{L^2}$$

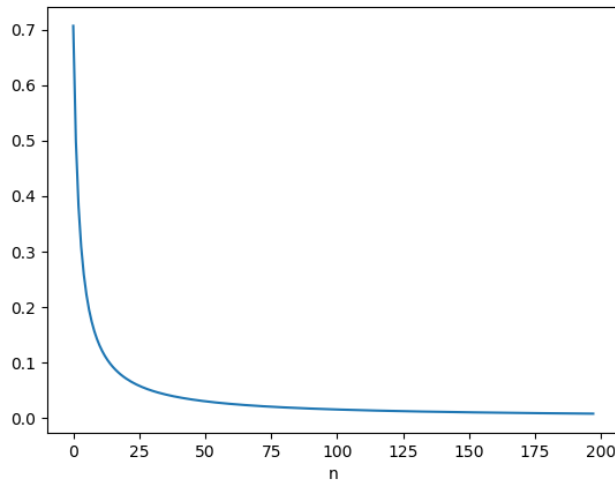


FIGURE 4 – Convergence  $\epsilon_n$  du schéma numérique de l’équation des ondes

De même, on peut vérifier la vitesse de la convergence, en calculant  $n\epsilon_n$  :

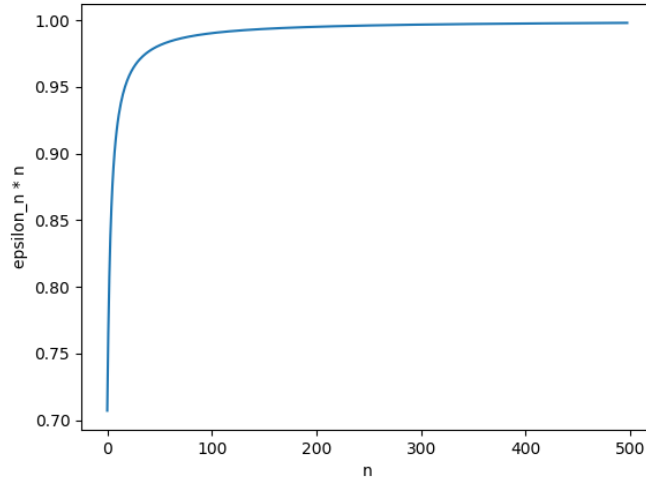


FIGURE 5 – Vitesse de convergence de l'équation des ondes

En fait, on peut montrer que la convergence est en  $O(\Delta x + \Delta t)$ . On peut améliorer cette convergence en  $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$  en améliorant la précision des conditions initiales. En effet, l'estimation  $U^1 = u_0 + \Delta t u_1$  n'est que du premier ordre, mais on peut améliorer cette convergence à l'ordre 2 en temps et espace, voire plus dans le cas  $C = 1$ . On peut trouver une preuve de la convergence de ce schéma et de la vitesse de convergence dans [Bé09].

## 3.2 Cas de l'équation des ondes avec obstacle

### 3.2.1 Définition de schémas numériques

Dans [SB89], on peut trouver un schéma numérique pour un problème semblable au précédent, où le contact ponctuel s'effectue au bout de la poutre en  $L$ , que l'on peut exprimer comme :

$$\begin{aligned} \square u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \\ \dot{u}(0, \cdot) &= u_1 \\ u(t, 0) &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions limites :

$$u'(t, L) = 0 \text{ et } u(t, L) > 0$$

$$\text{ou } u(t, L) = 0 \text{ et } u'(t, L) > 0$$

C'est donc la même condition de Neumann en L quand il n'y a pas contact, et une condition de Dirichlet quand il y a contact. [SB89] propose ce schéma numérique :

$$U_0^{k+1} = 0$$

$$U_j^{k+1} = 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(j\Delta x, k\Delta x)$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n_x - 1 \rrbracket$$

$$U_{n_x}^{k+1} = \max[0, 2U_{n_x}^k - U_{n_x}^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{n_x-1}^k - U_{n_x}^k)]$$

On peut trouver dans cet article une preuve de la convergence de ce schéma vers la solution du problème, sous la condition  $C \leq 1$ . Il est cependant difficile d'obtenir la solution exacte au problème, dès qu'il y a contact. On peut facilement voir qu'on peut adapter ce schéma à notre problème : on introduit  $n_l = \lfloor n_x \frac{l}{L} \rfloor \in \llbracket 1, n_x \rrbracket$  la position du contact ponctuel sur la grille. On a donc le schéma numérique :

$$U_0^{k+1} = 0$$

$$U_j^{k+1} = 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(j\Delta x, k\Delta t)$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n_l - 1 \rrbracket \cup \llbracket n_l + 1, n_x - 1 \rrbracket$$

$$U_{n_x}^{k+1} = 2U_{n_x}^k - U_{n_x}^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{n_x-1}^k - U_{n_x}^k) + \Delta t^2 f(n_x\Delta x, k\Delta t)$$

$$U_{n_l}^{k+1} = \max[0, U_{n_l}^{k+1} = 2U_{n_l}^k - U_{n_l}^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{n_l+1}^k - 2U_{n_l}^k + U_{n_l-1}^k + \Delta t^2 f(n_l\Delta x, k\Delta t))]$$

Cela revient à dire que quand l'onde est au dessus du point de contact elle se comporte normalement, quand elle arrive au point de contact elle s'y colle

et elle ne repart que quand  $U_{n_l+1}^k + U_{n_l-1}^k + f(n_l \Delta x, j \Delta t) \geq 2U_{n_l}^k$ . [SB89] nous donne une convergence de son schéma avec contact à droite en  $O(\sqrt{\Delta x})$ . Je n'ai malheureusement pas de preuve de la convergence de mon schéma. Cependant, en dehors du contact, le schéma est le même que sans le contact : l'erreur du schéma numérique ne vient donc que de l'erreur sur les conditions initiales, limites et au niveau du contact.

### 3.2.2 Résultats numériques

Je prends les mêmes conditions que dans la partie 3.1.2 : un quart de sinusoïde en position initiale et une vitesse initiale nulle :

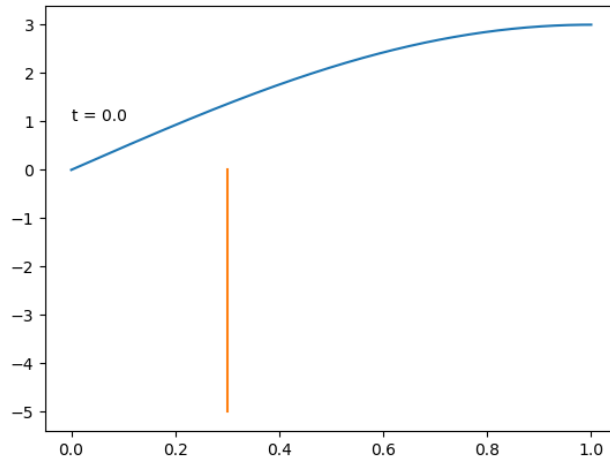


FIGURE 6 – Conditions initiales

Jusqu'au contact, le schéma donne le même résultat qu'avant. Au contact, la corde reste collée au point de contact :

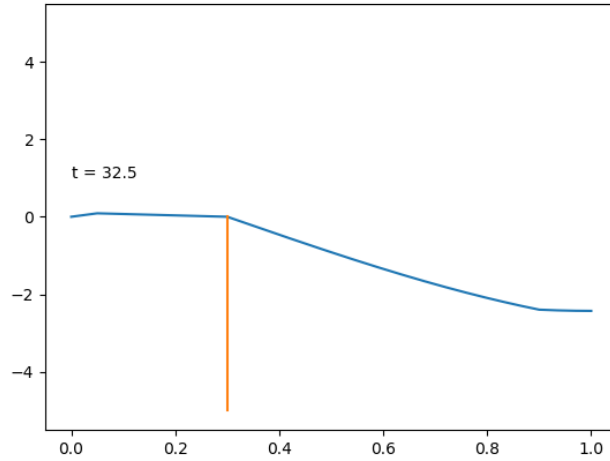


FIGURE 7 – Schéma numérique de l'équation des ondes avec contact

De plus, quand on se décolle, on peut voir que l'on ne revient pas à une solution en sinusoïde sans contact :

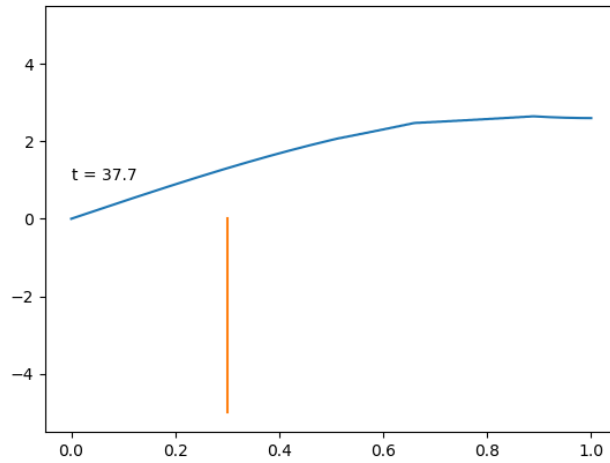


FIGURE 8 – Schéma numérique de l'équation des ondes après contact

### 3.3 Cas du système d'équation de Timoshenko

#### 3.3.1 Définition du schéma numérique sans contact ponctuel

Rappelons le système d'équation de Timoshenko :

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= u'' - \theta' + f \\ \ddot{\theta} &= g\theta'' + u' - \theta\end{aligned}$$

On peut donc utiliser les mêmes discrétisations des dérivées secondes en temps et espace. Pour les dérivées premières en espace, il suffit d'utiliser l'estimation suivante :

$$u'(x, \cdot) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, \cdot) - u(x - \Delta x, \cdot)}{2\Delta x}$$

On peut écrire le cœur du schéma numérique en utilisant les discrétisations, pour tout  $j \in \llbracket 1, n_x - 1 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{\Delta t^2} &= \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} - \frac{\Theta_{j+1}^k - \Theta_{j-1}^k}{2\Delta x} + f(k\Delta t, j\Delta x) \\ \frac{\Theta_j^{k+1} - 2\Theta_j^k + \Theta_j^{k-1}}{\Delta t^2} &= g \frac{\Theta_{j+1}^k - 2\Theta_j^k + \Theta_{j-1}^k}{\Delta x^2} - \frac{U_{j+1}^k - U_{j-1}^k}{2\Delta x} - \Theta_j^k\end{aligned}$$

ce qui s'écrit dans sa version explicite :

$$U_j^{k+1} = 2U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) - \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}(\Theta_{j+1}^k - \Theta_{j-1}^k) + \Delta t^2 f(k\Delta t, j\Delta x)$$

$$\Theta_j^{k+1} = 2\Theta_j^k - \Theta_j^{k-1} + g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\Theta_{j+1}^k - 2\Theta_j^k + \Theta_{j-1}^k) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}(U_{j+1}^k - U_{j-1}^k) - \Delta t^2 \Theta_j^k$$

Ainsi, on peut écrire le schéma numérique avec comme conditions initiales :

$$\begin{aligned}U_j^0 &= u_0(j\Delta x) \\ U_j^1 &= u_0(j\Delta x) + dtu_1(j\Delta x) \\ \Theta_j^0 &= \theta_0(j\Delta x) \\ \Theta_j^1 &= \theta_0(j\Delta x) + dt\theta_1(j\Delta x)\end{aligned}$$

Les conditions limites sont un peu plus complexes. En effet, elles s'expriment comme  $u = 0, \theta' = 0$  en  $x = 0$  et  $u' - \theta = 0, \theta' = 0$  en  $x = L$ . Nous allons donc introduire  $U$  et  $\Theta$  aux points  $j, n_x + 1$  et  $j, -1$ , et l'on pourra définir  $U$  et  $\Theta$  en introduisant ces évaluations en dehors de la grille dans nos expressions :

$$\begin{aligned} U_{-1}^k &= 2U_0^k - U_1^k \\ \Theta_{-1}^k &= \Theta_0^k \\ U_{n_x+1}^k &= U_{n_x}^k + dt\Theta_{n_x}^k \\ \Theta_{n_x+1}^k &= \Theta_{n_x}^k \end{aligned}$$

Ce qui nous donne les conditions limites :

$$U_0^k = 0$$

$$\begin{aligned} U_{n_x}^{k+1} &= 2U_{n_x}^k - U_{n_x}^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(dt\Theta_{n_x}^k - U_j^k + U_{j-1}^k) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}(\Theta_{n_x}^k - \Theta_{n_x-1}^k) + \Delta t^2 f(k\Delta t, j\Delta x) \end{aligned}$$

$$\Theta_0^{k+1} = 2\Theta_0^k - \Theta_0^{k-1} + g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\Theta_1^k - \Theta_0^k) + \frac{\Delta t^2}{\Delta x}(U_1^k - U_0^k) - \Delta t^2 \Theta_0^k$$

$$\begin{aligned} \Theta_{n_x}^{k+1} &= 2\Theta_{n_x}^k - \Theta_{n_x}^{k-1} + g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\Theta_{n_x-1}^k - \Theta_{n_x}^k) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}(U_{n_x}^k + dt\Theta_{n_x}^k - U_{n_x-1}^k) - \Delta t^2 \Theta_{n_x}^k \end{aligned}$$

### 3.3.2 Définition du schéma numérique avec contact ponctuel

On utilise ici la même technique pour simuler le contact ponctuel que dans le cas précédent, i.e. :

$$\begin{aligned} \Theta_j^{k+1} &= \max[0, 2\Theta_j^k - \Theta_j^{k-1} + g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\Theta_{j+1}^k - 2\Theta_j^k + \Theta_{j-1}^k) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}(U_{j+1}^k - U_{j-1}^k) - \Delta t^2 \Theta_j^k] \end{aligned}$$

### 3.3.3 Résultats numériques

Posons  $f = 0$  et  $l = 0.3L$ . Choisissons comme condition initiale  $\theta = 0$  et  $u$  en quart de sinusöide. La condition initiale est donc :

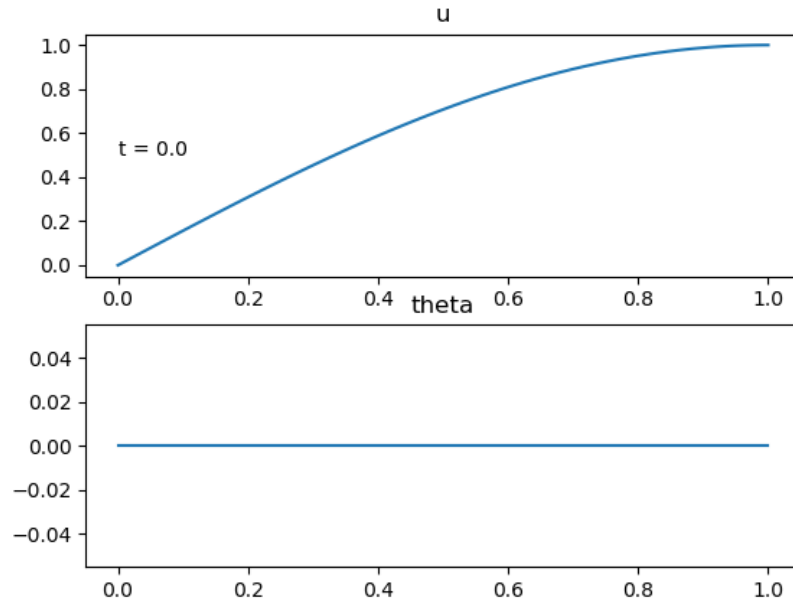


FIGURE 9 – Conditions initiales

Voici une capture de la solution numérique au cours d'un contact.

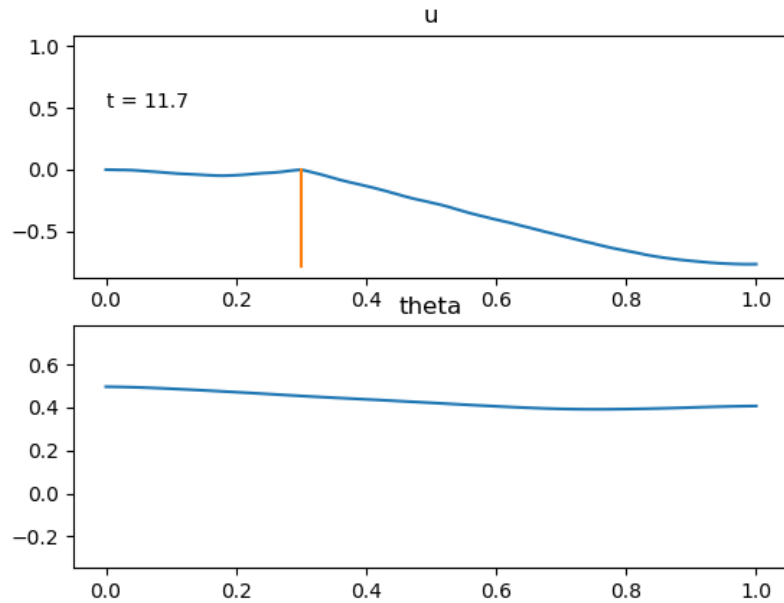


FIGURE 10 – Solution numérique à l'équation de Timoshenko pendant un contact

On observe ici un saut dans la dérivée de  $u$  en  $l$ , tout comme dans le cas de l'équation des ondes. En effet, la force qui agit sur l'onde s'écrit  $u'(+f)$ , et le saut se résorbe quand l'onde décolle du point de contact. Ici, c'est la force  $u' - \theta + f$  qui prend la place de  $u' + f$  : le saut dans  $\vec{N}$  se résorbe aussi quand la poutre décolle du point de contact. Cependant,  $\theta$  est continu, et donc seul  $u'$  fait un saut que l'on observe ici.

## 4 Problèmes ouverts

- [Sch80] nous donne une solution  $u$  telle que  $\square u - f \in M_+^1(\mathcal{Q})$ . Nous pourrions expliciter ce  $\mu$ , par exemple l'écrire sous la forme  $\mu = h(t)\delta_l(x)$ . Ensuite, nous pourrions prouver l'unicité de cette solution. Enfin, nous pourrions essayer d'adapter cette méthode par pénalisation au système différentiel de Timoshenko.
- Dans [SB89], on peut trouver une preuve que l'énergie est conservée par le schéma numérique, même avec un contact ponctuel. On peut

l'expliquer par le fait que l'énergie instantanée de la corde est  $\int_0^L \dot{u}^2 + u'^2$ , donc quand la corde arrive par le haut vers le point de contact, elle perde de l'énergie cinétique (en  $\dot{u}^2$ ), mais en gagne de chaque côté du point de contact en énergie potentielle (en  $u'^2$ ). De même, on peut définir une énergie sur la poutre dans le modèle de Timoshenko, et si besoin adapter notre schéma numérique afin de conserver l'énergie.

- On peut voir deux choses sur les vidéos capturées de mes solutions numériques au cours du temps. D'un côté, on peut voir que le schéma numérique pour l'équation des ondes<sup>4</sup> est très vraisemblable. D'un autre côté, on peut voir celui pour le modèle de Timoshenko<sup>5</sup> est beaucoup moins vraisemblable : cela ne ressemble pas à la dynamique d'un plongeur. Cela peut venir des approximations que nous avons admises. D'abord, on a fait un contact ponctuel sans perte d'énergie, alors que dans la réalité il est plutôt large (10cm pour un plongeur de 3m) et il y a une couche de mousse entre le plongeur et la surface de contact. D'autres approximations sont utiles : les conditions limites représentent bien comment se comportent les forces à gauche et à droite, il n'y a quasiment pas de torsion en situation réelle, utiliser la fibre moyenne est une bonne approximation du comportement d'une poutre, ne pas négliger la partie non linéaire de l'équation ne change pas grand chose ici.

---

4. voir <https://youtu.be/mFWnpVWntwg>

5. voir <https://youtu.be/Qt9iO-yIU4Q>

## 5 Annexe

### 5.1 Script Python pour l'équation des ondes

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib import animation
from matplotlib import pyplot as plt
import time

L = 1
l = 0.3
T = 100

def main(n_t, n_L):
    dx = L / n_L
    dt = T / n_t
    n_L += 1
    n_t += 1

    u_init = 3 * np.sin(np.arange(0, n_L)*dx * np.pi / (2*L))
    v_init = np.ones(n_L) * 0
    Z = np.zeros((n_t, n_L))
    Z[0,:] = u_init
    Z[1,:] = u_init + dt * v_init
    #Definition de la matrice de passage
    A = np.eye(n_L) * (2 - dt**2 / dx**2 * 2)
    A[-1,-1] = 2 - dt**2/dx**2
    for k in range(n_L-1):
        A[k,k+1] = dt**2/dx**2
        A[k+1,k] = dt**2/dx**2

    def f(u):
        return 0
    def ondes(n):
        Z[n] = A.dot(Z[n-1]) - Z[n-2] + dt**2 * f(Z[n-1])
        Z[n,0] = 0
        Z[n,n-1] = max(Z[n,n-1], 0)
    for n in range(2,n_t):
        ondes(n)
    return Z

n_L = 200
n_t = 20000
n_l = int(l * n_L / L)
dx = L / n_L
dt = T / n_t
```

```
Z = main(n_t, n_L)
```

## 5.2 Script Python pour Timoshenko

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib import animation

L = 1
n_L = 100
l = 0.3
T = 10
n_t = 10000
g = 3
dx = L / n_L
dt = T / n_t
n_l = min(int(l/dx), n_L)
n_L += 1

#Conditions initiales
u_init = np.sin(np.arange(0, L+dx, dx) * np.pi / 2)
theta_init = 0 * np.cos(np.arange(0, L+dx, dx))
v_init = np.zeros(n_L)
phi_init = np.zeros(n_L)
u = np.zeros((n_t, n_L))
theta = np.zeros((n_t, n_L))
u[0] = u_init
theta[0] = theta_init
u[1] = u_init + dt * v_init
theta[1] = theta_init + dt * phi_init

#Matrices de calcul
#J'ai divise le travail en 4 matrices, chacune portant l'
#influence de u/theta[k] sur u/
#theta[k+1]

M_u_u = np.zeros((n_L, n_L))
M_u_theta = np.zeros((n_L, n_L))
M_theta_u = np.zeros((n_L, n_L))
M_theta_theta = np.zeros((n_L, n_L))
for k in range(1, n_L-1):
    M_u_u[k, k] = 2 - 2 * dt**2/dx**2
    M_u_u[k, k+1] = dt**2 / dx**2
    M_u_u[k, k-1] = dt**2 / dx**2
    M_u_theta[k, k+1] = - dt**2 / (2*dx)
    M_u_theta[k, k-1] = dt**2 / (2*dx)
    M_theta_theta[k, k] = 2 - g * 2 * dt**2 / dx**2 - dt**2
```

```

    M_theta_theta[k,k+1] = g * dt**2 / dx**2
    M_theta_theta[k,k-1] = g * dt**2 / dx**2
    M_theta_u[k,k+1] = dt**2 / (2*dx)
    M_theta_u[k,k-1] = -dt**2 / (2*dx)
M_u_u[0,0] = 2
M_theta_theta[0,0] = 2 - dt**2 / dx**2 - dt**2
M_theta_theta[0,1] = dt**2 / dx**2
M_theta_u[0,0] = - dt**2 / (dx)
M_theta_u[0,1] = dt**2 / (dx)
M_u_u[-1,-1] = 2 - 2*dt**2 / dx**2
M_u_u[-1,-2] = 2 * dt**2 / dx**2
M_u_theta[-1,-1] = 2 * dt**3 / dx**2 - dt**2 / (2*dx)
M_u_theta[-1,-2] = dt**2 / (2*dx)
M_theta_theta[-1,-1] = 2 - dt**2 / dx**2 + dt**3 / (2*dx) - dt
                    **2
M_theta_theta[-1,-2] = dt**2 / dx**2

#Fonction f
t_f = np.ones(n_L) * 0
t_f[0] = 0
def f(t,u,theta):
    return t_f

#Fonction de calcul du temps n
def timoshenko(n):
    theta[n] = M_theta_theta.dot(theta[n-1])
                + M_theta_u.dot(u[n-1]) - theta[n-2]
    u[n] = M_u_u.dot(u[n-1]) + M_u_theta.dot(theta[n-1])
            - u[n-2] + dt**2 * f(n*dt, u[n-1], theta[n-1])
            + dt**2 * (M_theta_theta.dot(theta[n-1])
                + M_theta_u.dot(u[n-1]) - theta[n-2])*u[n-1]
    u[n, n_1] = max(u[n, n_1],0)

for n in range(2,n_t):
    timoshenko(n)

print("done")

```

## Références

- [Bre83] Haim Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Dunod, 1983.
- [Bé09] Eliane Bécache. Schémas numériques pour la résolution de l'équation des ondes. University Lecture, Jan 2009.
- [SB89] Michelle Schatzmann and Michel Bercovier. Numerical approximation of a wave equation with unilateral constraints. *Mathematics of Computation*, 53(187) :55–79, July 1989.
- [Sch80] Michelle Schatzmann. Un problème hyperbolique du 2ème ordre avec contrainte unilatérale : La corde vibrante avec obstacle ponctuel. *Journal of Differential Equations*, 36 :295–334, 1980.