Leçon 228 : Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Paul Mansanarez

25 mars 2021

Table des matières

En mathématiques, la notion de fonction est primordiale. Les fonctions permettent de représenter des associations d'objets. Dans cet exposé, nous nous intéressons aux fonctions réelles de la variable réelle. Celles-ci sont utilisés pour décrire des transformations de nombres réels.Par exemple, elles permettent de rendre compte l'évolution d'une valeur physique comme la trajectoire d'un point au cours du temps. Il est alors naturel de s'intéresser à leurs propriétés.

Dans la suite, I désignera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si on considère des intervalles de la forme $[a, b]$, alors a et b seront supposés distincts.

1 Fonctions continues.

Une des premières propriétés que l'on distingue est la notion de continuité, qui se résume de manière simple à tracer le graphe de la fonction sans "lever le crayon". Dans les faits, on le définit comme une propriété de limite.

1.1 Continuité et opérations.

Définition 1.1. Soit a dans I. L'application f est continue en a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = f(a)$$

On dira que f est continue sur I si elle est continue en chaque point de I. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Quelques exemples de fonctions continues :

- les fonctions polynomiales, c-à-d les applications de la forme $x \longmapsto P(x)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$, sont continues sur $\mathbb{R}$,
- les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$,
- la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Il existe des fonctions qui ne sont pas continues, comme la fonction de Heaviside $H := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ qui n'est pas continue en 0, et la fonction indicatrice de l'ensemble des rationnels $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue nulle part sur $\mathbb{R}$.

A partir de fonctions continues, on peut en construire d'autres avec des opérations simples :

Théorème 1.1. L'ensemble $\mathcal{C}^0(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, stable par la composition et par inverse (multiplicatif) lorsque ces opérations sont définies.

Par exemple, l'application $x \longmapsto 7\cos(x)e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Outre ces propriétés de stabilité, les fonctions continues vérifient des résultats intéressants, notamment le théorème des valeurs intermédiaires, qui permet d'obtenir un résultat d'existence de solution aux équations de la forme $f(x) = 0$ avec f une fonction continue.

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Théorème 1.2. (TVI) Si f est continue sur I alors pour tous $(u,v) \in I^2$ tel que $f(u) < f(v)$, l'intervalle $]f(u), f(v)[$ est inclus dans $f([u,v])$.

En particulier, $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Supposons f continue sur I. Soient u et v dans I tels que $f(u) < f(v)$, et soit y dans $]f(u), f(v)[$. Supposons sans perdre de généralité que $u \leq v$ et montrons qu'il existe $x \in [u,v]$ tel que $f(x) = y$.
Dans un premier temps, on va construire par récurrence deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) à valeurs dans $[u,v]$.

Notons $u_0 = u$, $v_0 = v$ et $c_0 = \frac{u_0+v_0}{2}$.
Si $f(c_0) \leq y$ alors on pose $u_1 = c_0$ et $v_1 = v_0$. Sinon on pose $v_1 = c_0$ et $u_1 = u_0$.
Dans les deux cas, on a :

$$u_0 \leq u_1 \ , \quad v_1 \leq v_0 \ , \quad f(u_1) \leq y \leq f(v_1) \ \text{ et } \ |v_1 - u_1| = \frac{1}{2}|v_0 - u_0|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$ dans $[u,v]$ tels que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \ \ f(u_k) \leq f(v_k)$$

et

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \ \ |v_k - u_k| = \frac{1}{2}|v_{k-1} - u_{k-1}|$$

On pose alors $c_n = \frac{v-n+u_n}{2}$ et on réitère l'étape précédente pour construire u_{n+1} et v_{n+1}, en regardant la position de $f(c_n)$ par rapport à y.
Par récurrence, on achève la construction de nos suites adjacentes. En effet, la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}|v-u| = 0$.

Comme elles sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune $x \in [u,v]$ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n \leq x \leq v_n$$

De plus, par construction des suites (u_n) et (v_n) on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ f(u_n) \leq y \leq f(v_n)$$

Comme f est continue, on obtient d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x)$ et d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(x)$. En passant à la limite dans l'inégalité, on en déduit $f(x) = y$.

Ainsi le segment $[f(u), f(v)]$ est inclus dans $f(I)$. Cela conclut. ■

L'application mentionnée précédemment s'en suit :

Théorème 1.3. Supposons que f soit continue sur I. Alors pour tous u, v dans I tels que $f(u)f(v) \leq 0$, il existe $x \in [u,v]$ tel que $f(x) = 0$.

Démonstration. Soient u et v dans I tels que $f(u)f(v) \leq 0$. Sans perdre de généralité, on suppose $f(u) \leq f(v)$. Les quantités $f(u)$ et $f(v)$ ont des signes différents, et l'hypothèse $f(u) \leq f(v)$ nous assure qu'on a forcément $f(u) \leq 0$ et $f(v) \leq 0$ sinon les deux nombres auraient le même signe.
Le théorème 1.2 permet de conclure, en remarquant qu'on a $0 \in [f(u), f(v)]$. ■

<u>Théorème</u> 1.4. Supposons que I soit de la forme $[a,b]$ et que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Alors f admet un point fixe dans $[a,b]$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.3 à l'application $g : x \longmapsto f(x) - x$ qui est continue sur $[a,b]$ et vérifie $g(a)g(b) \leq 0$. ∎

Il existe cependant des fonctions qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires mais qui ne sont pas continues. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto sin(\frac{1}{x})$, et prolongée en 0 par $f(0) = 0$, n'est pas continue sur $[0,1]$. Pourtant, elle vérifie : pour tout intervalle J inclus dans $[0,1]$, $f(J)$ est un intervalle.

On a aussi le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 1.5. Si I est un segment et f est continue sur I alors $f(I)$ est un segment.

Démonstration. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $I = [a,b]$. Par le théorème 1.2, $f([a,b])$ est un intervalle, et c'est un intervalle borné. Pour s'en assurer, on peut raisonner par l'absurde et construire par compacité de $[a,b]$ une suite d'éléments de $[a,b]$ qui converge mais dont la suite image diverge.
Soit alors β dans $\mathbb{R}$ tels que $\beta = \sup f([a,b])$. On montre qu'il existe x dans $[a,b]$ tel que $f(x) = \beta$ (le cas de $\inf f([a,b])$ se traite de façon analogue).

Par propriété du supremum, il existe une suite (y_n) d'éléments de $f([a,b])$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$. Soit (x_n) une suite d'éléments de $[a,b]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) = y_n$. La suite (x_n) est à valeurs dans le compact $[a,b]$: on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de limite $x \in [a,b]$. Par continuité de f, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$. Comme la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ est une sous-suite de $(f(x_n)) = (y_n)$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \beta$. Par unicité de la limite, on obtient $\beta = f(x)$. Cela conclut. ∎

Par ailleurs, dans le cadre des fonctions monotones, on a une équivalence entre être continue et posséder un intervalle comme image.

<u>Théorème</u> 1.6. Si f est croissante sur I alors $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue sur I.

<u>Théorème</u> 1.7. Supposons que $f : I \to J$ est continue et bijective. Alors f^{-1} est continue sur J.

On a deux autres formes de régularité, plus contraignantes que la continuité.

1.3 Deux autres formes de régularité.

<u>Définition</u> 1.2. On dit que f est uniformément continue sur I si on a :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \ \forall (x,y) \in I^2 \ \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Définition 1.3. On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

Par exemple, pour p dans $]1,+\infty[$ et q réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le produit de convolution $f * g$ de $f \in L^p(\mathbb{R})$ par $g \in L^q(\mathbb{R})$ est uniformément continu sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.8. On a les implications suivantes :
- Si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I.
- Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.

Démonstration. Le premier point s'obtient en considérant $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et en posant $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ pour obtenir la définition d'uniforme continuité.
Le deuxième point s'obtient en écrivant la définition de la continuité en un point $x \in I$ sous la forme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in [x-\eta, x+\eta] \cap I \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

et en prenant η égal au δ obtenu par la définition d'uniforme continuité. ■

En particulier, les fonctions lipschitziennes et uniformément continues sont des exemples de fonctions continues.
Cependant, ces précédentes implications ne sont pas des équivalences. En effet, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas lipschitzienne. De même, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue.

On a quand même une forme de réciproque dans un des cas :

Théorème 1.9. **(Heine)** Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration. On raisonne par contraposition et on suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe x_n et y_n dans $[a,b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

La suite $(x_n))$ est à valeurs dans le compact $[a,b]$ donc on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de limite $l \in [a,b]$. De même, on peut extraire une sous-suite convergente $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ de la suite $(y_{\varphi(n)})$. Comme la suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ est une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$, elle converge aussi vers l. De plus, par propriété des extractrices φ et ψ on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi \circ \psi(n) + 1} \leq \frac{1}{n+1}$$

donc $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ converge elle aussi vers l. Or on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) - f(y_{\varphi\circ\psi(n)})| \geq \varepsilon > 0$$

ce qui entraîne que f n'est pas continue en l. Cela conclut. ■

2 Fonctions dérivables.

Etant donné la trajectoire d'un point au cours du temps, on se pose la question de savoir quelle est sa vitesse. Une façon rapide d'y répondre est de calculer la vitesse moyenne mais nous voudrions quelque chose de plus précis comme la vitesse exacte à un instant t. Pour cela on cherche à calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f à un instant t fixé. Nous définissons ainsi la dérivation d'une fonction.

2.1 Dérivée d'une fonction.

Définition 2.1. Soit a dans I. On dit que f est dérivable en a s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Dans ce cas, on appelle dérivée de f en a la quantité l et on la note $f'(a)$. De même, on dira que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I et on appelera dérivée de f la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en a (voir Fig2).

Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^2$ est dérivable de dérivée $x \longmapsto 2x$.

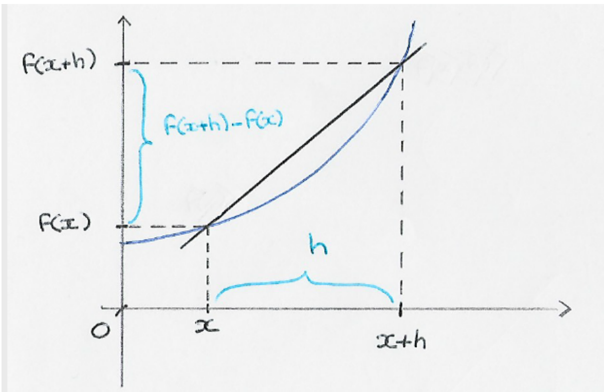

Fig2 : Taux d'accroissement et dérivée

Théorème 2.1. Soit a dans I. Alors f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue en a telle que

$$\forall x \in I \quad f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = \varphi(a)$.

Démonstration. Soit a dans I.

— Supposons f dérivable en a. On définit φ sur I par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Comme f est dérivable en a, la fonction φ est continue en a, et l'égalité voulue découle de la définition de φ.

— Réciproquement, supposons qu'il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en a telle que

$$\forall x \in I \quad f(x) - f(a) = (x-a)\varphi(x)$$

On a alors

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \varphi(x)$$

et donc par continuité de φ en a on obtient

$$\underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{lim} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{lim} \varphi(x) = \varphi(a) \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en a.

■

A l'instar des fonctions continues sur I, les fonctions dérivables sur I sont aussi stables par opérations algébriques.

Théorème 2.2. L'ensemble $\mathcal{D}(I)$ des fonctions dérivables sur I est une $\mathbb{R}$-algèbre, stable par composition et par inverse (multiplicatif).
De plus, on a les règles de calcul suivantes dès que c'est défini :

- $(\lambda \dot{f} + g)' = \lambda \dot{f}' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$
- $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$

Théorème 2.3. Si f est bijective, dérivable sur I et si sa dérivée ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Par exemple, la fonction tangente établit une bijection de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, sa dérivée est la fonction $1 + tan^2$. Son application réciproque est donc dérivable sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de dérivée $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Pour démontrer les théorèmes 2.2 et 2.3, on utilise la caractérisation de la dérivabilité en un point obtenue dans le théorème 2.1.

2.2 Lien avec la continuité.

On a le résultat suivant qui donne un premier lien entre continuité et dérivabilité :

Théorème 2.4. Une fonction dérivable est continue.

La réciproque de cet assertion est fausse. En effet, l'application $x \longmapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en 0.

En fait, c'est même plus fort que cela :

Théorème 2.5. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et nulle part dérivables est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$.

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ qui sont dérivables en aucun point de $[0,1]$. On va montrer que le complémentaire de A dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ est inclus dans une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides. Comme l'espace $\big(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty\big)$ est un espace de Banach, le théorème de Baire assurera que A est dense.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note F_n l'ensemble

$$\big\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \ / \ \exists x \in [0,1] \ \forall y \in [0,1] \quad |f(y) - f(x)| \leq n|x-y|\big\}$$

Comme une fonction dérivable en un point a un taux d'accroissement borné au voisinage de ce point et comme $[0,1]$ est compact, on en déduit l'inclusion suivante

$$\complement_{\mathcal{C}^0([0,1])} \mathrm{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n$$

Montrons que F_n est un fermé d'intérieur vide, ce qui conclura la démonstration par théorème de Baire.

• <u>F_n est fermé</u> : soit (f_k) une suite d'éléments de F_n qui converge vers $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Par propriété de F_n, il existe une suite (x_k) à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall y \in [0,1] \quad |f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k|$$

Comme $[0,1]$ est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\overline{x} \in [0,1]$ tels que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{\varphi(k)} = \overline{x}$.
Montrons qu'on a

$$\forall y \in [0,1] \quad \lim_{k\to+\infty} (f_{\varphi(k)}(y) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})) = f(y) - f(\overline{x})$$

Ainsi un passage à la limite dans l'inégalité précédente assurera que f appartient à F_n.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$|f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(\overline{x})| \leq |f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(x_{\varphi(k)})| + |f(x_{\varphi(k)}) - f(\overline{x})|$$

puis

$$|f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(\overline{x})| \leq \|f_{\varphi(k)} - f\|_\infty + |f(x_{\varphi(k)}) - f(\overline{x})|$$

Par continuité de f et par la convergence uniforme de (f_k) vers f, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) = f(\overline{x})$. De plus, la convergence uniforme nous assure qu'on a

$$\forall y \in [0,1] \quad \lim_{k\to+\infty} f_{\varphi(k)}(y) = f(y)$$

On en déduit que F_n est fermé.

• <u>L'intérieur de F_n est vide</u> : montrons que toute boule centrée en un élément de de F_n n'est pas incluse dans F_n. Pour cela, on montre qu'on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall f \in \mathrm{F}_n \ \exists g \in \complement\, \mathrm{F}_n \quad \|f-g\|_\infty < \varepsilon$$

On remarque qu'un élément g dans $\complement\, \mathrm{F}_n$ est une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1]\ \exists y \in [0,1] \quad |g(y)-g(x)| > n|x-y|$$

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathrm{F}_n$. Construisons un tel élément g. Comme $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, il existe P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Le polynôme P ne convient pas totalement pour notre g car il est dérivable partout sur $[0,1]$. On va donc considérer un g de la forme $P+g_0$ avec g_0 une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\|g_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, il faut que le choix d'un tel g_0 soit adéquat avec la condition d'appartenance de g à $\complement\, \mathrm{F}_n$. Par inégalité triangulaire, il suffit qu'on ait

$$\forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |g_0(y)-g_0(x)| - |P(y)-P(x)| > (n+1)|x-y|$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à P nous assure qu'il suffit de construire g_0 tel que

$$\forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |g_0(y)-g_0(x)| > (M+n+1)|x-y|$$

où $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P'(x)|$. On construit g_0 sous la forme d'une fonction affine par morceaux.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\varepsilon}{2}N > M+n+1$. On définit g_0 sur $[0, \frac{1}{N}]$ par

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2N}] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in [\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}] \end{cases}$$

et on la prolonge en une fonction $\frac{1}{N}$-périodique sur $[0,1]$. Une telle fonction convient, ce qui termine la construction de g. On en déduit $\mathring{\mathrm{F}}_n = \emptyset$. Cela conclut. ■

2.3 Variations et dérivée.

Théorème 2.6. Supposons f dérivable en $a \in \mathring{I}$. Si f admet un extremum en local en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admette un maximum local en a. Alors il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\quad f(x) \leq f(a)$$

En particulier, on a

$$\forall x \in]a-\eta, a[\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

et donc, comme f est dérivable en a, on obtient par passage à la limite $f'(a) \geq 0$. De même, en considérant le taux de variation sur $]a, a+\eta[$ on obtient $f'(a) \leq 0$ et donc $f'(a) = 0$. ■

La réciproque n'est pas vraie. En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ n'a pas d'extremum en 0 et sa dérivée s'annule en 0.

Théorème 2.7. (Rolle) Soient a,b réels tels que $a < b$. Si f est continue sur un segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$

Démonstration. Si f est constante alors on a $\frac{a+b}{2} \in]a,b[$ et $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$.

Supposons que f n'est pas constante. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, son image $f([a,b])$ est aussi un segment. Soient m et M dans $\mathbb{R}$ tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Comme $f(a) = f(b)$ et f n'est pas constante, une des deux valeurs m et M n'est pas égale à $f(a)$. Par exemple, supposons $M \neq f(a)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$. Comme M est un maximum de f, on en déduit par le théorème 2.6 que $f'(c)$ est nul. ■

Théorème 2.8. (accroissements finis) Supposons f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à l'application

$$g : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

. ■

Ce résultat est utile pour obtenir des inégalités avec les fonctions usuelles. Par exemple, on peut montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad Arctan(x) \leq x$$

On en déduit aussi les résultats suivants :

Théorème 2.9. Supposons f dérivable sur I. Alors f est lipschitzienne sur I si et seulement si sa dérivée f' est bornée.

Démonstration. On procède par double implications :

($\Rightarrow$) Si f est M-lipschitzienne sur I alors on a en particulier

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad x \neq y \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \mathrm{M}$$

et donc, en passant à la limite dans l'inégalité, on obtient que la fonction dérivée f' est bornée.

($\Leftarrow$) Si f' est bornée par M alors par le théorème 2.8, on obtient

$$\forall (x,y) \in I^2 \;\; x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

et donc f est M-lipschitzienne sur I.

■

La condition I est un intervalle est importante. En effet, la fonction de Heaviside (précédemment introduite) est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^*$. Cela déoule du fait qu'on ait pour tout $x \in]0,1]$ $|H(x) - H(0)| = 1$.

Théorème 2.10. (Darboux) Une fonction dérivée à la propriété des valeurs intermédiaires, c-à-d l'image d'un intervalle par celle-ci est un intervalle.

Démonstration. Supposons f dérivable sur I. Dans un premier temps, on suppose que I est ouvert. Soient x,y dans $f'(I)$ tels que $x < y$. Soit $z \in]x,y[$. Il existe u et v dans I tels que $f'u) = x$ et $f'(v) = y$. Montrons qu'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{fu+h-f(u)}{h} < z < \frac{f(v+h)-f(v)}{h}$$

Comme f est dérivable, les quantités $\frac{fu+h-f(u)}{h}$ et $\frac{fv+h-f(v)}{h}$ tendent vers respectivement x et y lorsque h tend vers 0. Alors les inégalités $x < z < y$ assure l'existence d'un tel h. Pour ce h, on définit une application g sur un sous-intervalle de I contenant x et y par

$$g(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

En particulier, on a $g(u) < z < g(v)$ par définition de h. Comme f est dérivable, donc continue sur I, l'application g est aussi continue. Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $w \in [u, v]$ tel que $g(w) = z$ et par théorème 2.8 on obtient qu'il existe $c \in [w, w + h]$ tel que $f'(c) = g(w) = z$. Ainsi z appartient à $f'(I)$.

A présent, on examine le cas où I n'est pas ouvert. Par exemple, supposons que $I = [a, b[$. Par égalité des accroissements finis, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit, il existe $c_h \in]a, a + h[$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c_h)$$

Donc par définition du nombre dérivée $f'(a)$ on obtient

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f'(c_h) = f'(a)$$

Ainsi $f'(a)$ est adhérent à $f'(]a, b[)$, donc, comme $f'(]a, b[)$ est un intervalle, on obtient que $f'([a, b[)$ est un intervalle. Le cas de la borne supérieure b se traite de la même façon. ■

On n'a pas besoin de la continuité de la fonction dérivée dans le théorème précédent.

Enfin on a un résultat reliant croissance et dérivée :

Théorème 2.11. Supposons f dérivable sur I. On a :
- f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$;
- f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et l'ensemble $\{f' = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non trivial.

Démonstration. La première assertion se démontre d'une part en utilisant le taux d'accroissement et d'autre part en utilisant le théorème des accroissements finis.

Notons A l'ensemble $\left\{x \in \mathring{I} \;\middle/\; f'(x) \geq 0\right\}$ et supposons que f est croissante sur I. On montre alors que f est strictement croissante si et seulement si A ne contient pas d'intervalle non trivial. On remarque que f n'est pas strictement croissante si et seulement s'il existe $(u, v) \in I^2$ tel que $u < v$ et $f(u) = f(v)$, c-à-d si et seulement s'il existe $(u, v) \in I^2$ tel que $u < v$ et $]u, v[\subset A$. Il s'en suit la deuxième assertion. ■

2.4 Dérivées d'ordres supérieurs.

Définition 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit par récurrence les espaces de fonctions suivants :

- l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I :

$$\mathcal{D}^n(I) = \mathcal{D}(I) \cap \mathcal{D}^{n-1}(I)$$

  où $\mathcal{D}^0(I) = \mathcal{C}^0(I)$.
- l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I :

$$\mathcal{C}^n(I) = \left\{ g \in \mathcal{D}^n(I) \ / \ g^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I) \right\}$$

- l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^m(I)$$

où $g^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de g.

On remarque qu'une fonction dérivée n'est pas toujours continue : la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

Théorème 2.12. (Leibniz) Soient f et g dans $\mathcal{C}^n(I)$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. On montre ce résultat par une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la relation de Pascal

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

pour $1 \leq k \leq n$. ■

Théorème 2.13. (Taylor-Lagrange) Supposons f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $f^{(n)}$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Démonstration. Notons A le réel défini par l'égalité suivante

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

On note φ l'application

$$x \longmapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et dérivable $(n+1)$-fois sur $]a,b[$, l'application φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Par théorème de Rolle, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or on a aussi

$$\forall x\in]a,b[\quad \varphi'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}\left(A-f^{(n+1)}(x)\right)$$

Comme on a $c\neq b$ et $\varphi'(c)=0$, on obtient $A=f^{(n+1)}(c)$. Cela conclut. ■

Cette égalité permet de déduire des développements de fonctions usuelles. Par exemple, on en déduit

$$\sin(x)-x\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{6}$$

Pour les deux points qui suivent on supposera que I est ouvert.

Définition 2.3. On appelle support de $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ l'ensemble

$$Supp(f)=\overline{\{x\in I\ /\ f(x)\neq 0\}}$$

et on note $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à support compact.

Théorème 2.14. Soit a,b réels tels que $[a,b]\subset I$. Il existe une fonction $\chi\in\mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que

$$\chi_{|_{[a,b]}}=1\quad\text{et}\quad 0\leq\chi\leq 1$$

2.5 Limites et dérivées.

Dans certains cas, on peut prolonger le caractère dérivable sur les bornes du domaine de dérivation.

Théorème 2.15. Supposons que f soit continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $\underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{lim}f'(x)=l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Alors on a deux alternatives :

i) soit $l\in\mathbb{R}$ et alors f est dérivable en a et $f'(a)=l$;

ii) soit l est infini et alors f n'est pas dérivable en a.

Les propositions suivantes donnent des résultats sur la conservation de la continuité/dérivabilité par passage à la limite pour des suites de fonctions :

Théorème 2.16. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers f.
Alors f est continue sur I.

Théorème 2.17. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Supposons que la suite (f_n) converge simplement vers f et que la suite des dérivées (f_n) converge uniformément vers une fonction g.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $f'=g$.

Par exemple, la fonction $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in]1,+\infty[\ \ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{ln(n)^k}{n^x}$$

3 Introduction aux distributions.

En Physique, il est utile de dériver des grandeurs pour obtenir des relations ou calculer des vitesses. Dans plusieurs cas, cela n'a pas de sens car les fonctions que l'on dérive ne sont pas dérivables voire même pas continues. Cependant, on peut y donner du sens en considérant les fonctions utilisées comme des objets plus généraux.

La notion de mesure, forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c(I)$, est une première généralisation de la notion de fonction mais il persiste quelques problèmes de convergence (voir 3.3.(2)) : il manque des éléments. Pour y remédier, nous considérons les formes linéaires sur un espace plus petit : $\mathcal{C}_c^\infty(I)$.

3.1 Un notion de fonction plus générale.

Dans cette partie, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1. Une distribution sur I est une forme linéaire T sur $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ vérifiant la condition de continuité suivante : pour tout compact $K \subset I$, il existe $p_K \in \mathbb{N}$ et $C_K \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \ \ Supp(\varphi) \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{0 \leq \alpha \leq p_K} \|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty$$

On appelle ordre de T le plus petit entier (éventuellement infini) p_K convenant pour tout compact K.
On note $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I.

Voici quelques exemples de distributions :

(1) La mesure de Dirac δ_0 définit par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \ \ \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre 0.

(2) L'application T définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \ \ \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

(3) Les distributions d'ordre 0 sont les mesures de Radon, c-à-d les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}_c(I)$.

De plus, on a l'inclusion suivante :

Théorème 3.1. L'application linéaire T de $L^1_{loc}(I)$ dans $\mathcal{D}'(I)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \quad \langle T(g), \varphi \rangle = \int_I g(x)\varphi(x)dx$$

est injective.

Donc en particulier les applications continues sur I définissent des distributions sur I. Il est coutume d'identifier une fonction $g \in L^1_{loc}(I)$ à son image $T(g) \in \mathcal{D}'(I)$.

3.2 Dérivation des distributions.

Définition 3.2. Soit T dans $\mathcal{D}'(I)$. On appelle dérivée de T la distribution T' sur I définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \quad \langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle$$

Dans le cas où $T = T(g)$ avec $g \in \mathcal{C}^1(I)$, les deux notions de dérivées coïncident, c-à-d on a

$$T(g)' = T(g')$$

Pour le voir, il suffit d'intégrer par parties.

On peut dériver une distribution à n'importe quel ordre, ce qui est beaucoup plus souple que précédemment : on ne pouvait pas dériver toutes les fonctions continues.

Par exemple, pour $f(x) = \frac{|x|}{2}$, on a $f'' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Théorème 3.2. Soit T dans $\mathcal{D}'(I)$. Si $T' = 0$ alors T est une distribution constante, c-à-d il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T = \lambda$.

Démonstration. Supposons que T' est la distribution nulle. Soient a et b réels tels que $I =]a, b[$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tel que $\chi \geq 0$ et $\displaystyle\int_I \chi(x)dx = 1$. Notons ψ l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \left(\varphi(t) - \chi(t)\int_I \varphi(u)du\right) dt$. Alors ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et est à support compact, car φ et χ le sont. On a :

$$\langle T, \psi' \rangle = -\langle T', \psi \rangle = 0$$

c-à-d

$$\langle T, \varphi - \chi \int_I \varphi(t)dt \rangle = 0$$

d'où

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \rangle \int_I \varphi(t)dt = \langle \langle T, \chi \rangle, \varphi \rangle$$

Cela conclut. ∎

En outre, le résultat ci-dessus montre que la notion de dérivée au sens des distributions est une notion meilleure que celle de dérivation presque partout : en effet, l'escalier de Cantor construit une fonction continue non constante, dérivable presque partout de dérivée nulle.

On obtient un résultat plus général vis-à-vis des relations entre dérivées et croissance.

Définition 3.3. Soit T une distribution sur I. On dit que T est positive si on a

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \quad (\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi\rangle \geq 0)$$

Théorème 3.3. Soit $f \in L^1_{loc}(I)$. Alors f est croissante, i.e. vérifie $\forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad f - \tau_h(f) \geq 0$ p.p., si et seulement si f' est une distribution positive.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas $I = \mathbb{R}$ pour plus de simplicité.

($\Rightarrow$) Supposons que f est croissante au sens énoncé. Soit φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}dx = -\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}dx\\ &= -\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\varphi(x)dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)-\tau_h(f)(x)}{h}\varphi(x)dx \geq 0\end{aligned}$$

Donc f' est une distribution positive (l'interversion limite et intégrale dans le calcul précédent est licite car φ est à support compact).

($\Leftarrow$) Supposons que f' est une distribution positive. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. On utilise le fait que $f - \tau_h(f)$ est positive presque partout si et seulement si elle définit une distribution positive. On a

$$\begin{aligned}\langle f - \tau_h(f), \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}}(f(x) - f(x-h))\,\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,(\varphi(x) - \varphi(x+h))\,dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(x)dx = \langle f, \psi'\rangle\end{aligned}$$

où $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{x+h}\varphi(y)dy$ est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi \geq 0$. Cela conclut. ∎

Enfin, on peut aussi montrer le résultat suivant :

Théorème 3.4. Soit u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tel que u' soit dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\chi_{\{u'=a\}}u' = 0$$

où χ_A est l'indicatrice de l'ensemble A.

3.3 Convergence de distributions.

On peut aussi définir une topologie sur l'espace $\mathcal{D}'(I)$ en donnant les suites convergentes :

Définition 3.4. On dit qu'une suite (T_n) de distributions sur I converge vers $T \in DD'(I)$ si on a

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \quad \underset{n\to+\infty}{lim}\langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Quelques exemples de convergence :

(1) La suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ f_n(x) := \sin(nx)$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers 0.

(2) La suite de distributions (T_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ T_n := \frac{n}{2}\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $-\delta_0' : \varphi \longmapsto \varphi'(0)$.

3.4 Une précision sur les fonctions lipschitziennes

On suppose toujours que I est un intervalle ouvert.

Théorème 3.5. La fonction f est lipschitzienne sur I si et seulement s'il existe une application $g \in L^\infty(I)$ telle que

$$\forall (x,y) \in I^2 \ \ f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)dt$$

Par le théorème de différentiation de Lebesgue, on en déduit alors qu'une fonction lipschitzienne est dérivable presque partout, de dérivée $g \in L^\infty(I)$.

Avant de démontrer le théorème 3.4, on a besoin d'un résultat de dualité (démontré en annexe) :

Théorème 3.6. L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} L^\infty(I) & \longrightarrow & \left(L^1(I)\right)' \\ g & \longmapsto & \left[\varphi \mapsto \int_I g(t)\varphi(t)dt\right] \end{array}$$

est une isométrie linéaire surjective, c-à-d le dual topologique de $L^1(I)$ est isomorphe à $L^\infty(I)$.

Démonstration. (théorème 3.4)

($\Leftarrow$) Ce sens est immédiat : on majore le module de l'intégrale par

$$\|g\|_{L^\infty(I)}|x-y|$$

pour retrouver la définition de fonction lipschitzienne.

($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons que f est une fonction M-lipschitzienne, avec $M \in \mathbb{R}_+^*$.

Etape 1 : Notons T la dérivée de f' au sens des distributions et prolongeons-la en une forme linéaire continue sur $L^1(I)$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par théorème de convergence dominée, on a

$$-\int_I f(x)n\left(\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right) - \varphi(x)\right)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_I f(x)\varphi'(x)dx = T(\varphi)$$

De plus, on a aussi (pour n assez grand) :

$$\left|\int_I \varphi(x)\left(\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right)dx\right| = n\left|\int_I \varphi(x)n\left(f\left(x-\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)dx\right|$$

$$\leq n\int_I |\varphi(x)|\left|f\left(x-\frac{1}{n}\right)-f(x)\right|dx$$

$$\leq M\int_I |\varphi(x)|dx = M\|\varphi\|_{L^1(I)}$$

Donc en passant à la limite en n dans l'inégalité on obtient :

$$|T(\varphi)| \leq M\|\varphi\|_{L^1(I)}$$

c-à-d T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ pour la norme $\|.\|_{L^1(I)}$. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est dense dans $L^1(I)$, le théorème de prolongement des applications linéaires continues assure qu'il existe $\xi \in \left(L^1(I)\right)'$ tel que $\xi_{|\mathcal{C}_c^\infty(I)} = T$.

Etape 2 : Le théorème 3.5 de dualité assure qu'il existe $g \in L^\infty(I)$ tel que

$$\forall \varphi \in L^1(I) \;\; \xi(\varphi) = \int_I g(x)\varphi(x)dx$$

En se restreignant à $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ on obtient l'égalité $g = f'$ au sens des distributions.

Etape 3 : Soit x_0 dans I. Notons h l'application continue sur I définie par

$$h(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$$

Montrons que h est une primitive de g au sens des distributions.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. On a :

$$\langle h', \varphi\rangle = -\int_I\left(\int_{x_0}^t g(s)ds\right)\varphi'(t)dt$$

$$= -\int_I\left(\int_I g(s)\varphi'(t)\mathbb{1}_{\{x_0\leq s\leq t\}}ds\right)dt + \int_I\left(\int_I g(s)\varphi'(t)\mathbb{1}_{\{t\leq s\leq x_0\}}ds\right)dt$$

$$= -\int_I g(s)\mathbb{1}_{\{s\geq x0\}}\left(\int_I \varphi'(t)\mathbb{1}_{\{t\geq s\}}dt\right)ds + \int_I g(s)\mathbb{1}_{\{s\leq x0\}}\left(\int_I \varphi'(t)\mathbb{1}_{\{t\leq s\}}dt\right)ds$$

$$= \int_I g(s)\varphi(s)\mathbb{1}_{\{s\geq x0\}}ds + \int_I g(s)\varphi(s)\mathbb{1}_{\{s\leq x0\}}ds$$

$$= \int_I g(s)\varphi(s)ds = \langle g, \varphi\rangle$$

L'interversion des intégrales est justifié par théorème de Fubini. En effet, les applications

$$(s,t) \longmapsto g(s)\varphi'(t)\mathbb{1}_{\{x_0\leq s\leq t\}}$$

et

$$(s,t) \longmapsto g(s)\varphi'(t)\mathbb{1}_{\{x_0 \geq s \geq t\}}$$

sont intégrables sur $I \times I$ en majorant le module l'intégrande par respectivement $\|g\|_\infty \varphi'(t)\mathbb{1}_{[x_0,R]}(s)$ et $\|g\|_\infty \varphi'(t)\mathbb{1}_{[r,x_0]}(s)$, avec r, R réels tels que

$$Supp(\varphi) \subset [r,R] \subset I$$

On en déduit donc $h' = g$ au sens des distributions.

Etape 4 : On obtient $h' = g = f'$ donc par théorème 3.2 on a $h = f + C$ dans $\mathcal{D}'(I)$, où $C \in \mathbb{R}$. Comme les applications h et f sont continues, on en déduit $h = f + C$ sur I.
Cela conclut.

■

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 3.7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors sa dérivée au sens des distributions est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille $\left(\frac{f(.+h)-f}{h}\right)_{h\in\mathbb{R}_+^*}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

En fait, on peut généraliser le théorème 3.5.. Il faut tout d'abord introduire la notion de fonction höldérienne :

Définition 3.5. Soit α dans $]0,1]$. On dit que f est α-höldérienne sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

On note $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$ l'ensemble des fonctions α-höldériennes sur I.

On remarque que pour $\alpha = 1$, on retrouve les fonctions lipschitziennes sur I.
Des exemples de fonctions höldériennes sont les fonctions puissances de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in]0,1]$.
On pourrait considérer $\alpha > 1$ dans la définition mais cela n'apporte pas beaucoup. En effet, si $\alpha > 1$ et f est α-höldérienne alors on a

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad x \neq y \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M|x-y|^{1-\alpha}$$

pour un certain $M \in \mathbb{R}_+$. En fixant x et en faisant tendre y vers x dans l'expression précédente, comme $1 - \alpha > 0$, on en déduit que f est dérivable en x de dérivée nulle. Donc f est constante sur I.

En reprenant la preuve du théorème 3.3, on obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.8. Soient p et q dans $]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors f est $\frac{1}{q}$-höldérienne si et seulement s'il existe $g \in L^p(I)$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)dt$$

Application :

Notons $H^1(0,1)$ l'ensemble de fonctions suivant

$$\{g \in L^2(0,1) \ / \ g' \in L^2(0,1)\}$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{H^1(0,1)} = \langle f, g \rangle_{L^2(0,1)} + \langle f', g' \rangle_{L^2(0,1)}$$

On a le résultat suivant sur cet espace :

Tout $f \in H^1(0,1)$ admet un représentant continu $\overline{f}$ et on a

$$\forall (x,y) \in]0,1[\quad \overline{f}(x) - \overline{f}(y) = \int_y^x f'(t)dt$$

Par le théorème 3.5, on en déduit une injection (continue)

$$H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}([0,1])$$

4 Annexe.

4.1 Démonstration du théorème 3.5. avec $I = \mathbb{R}$.

Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad |\Phi(g)(\varphi)| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Donc Φ est bien définie, de plus par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. L' inégalité précédente assure de plus que l'application $\Phi(g)$ vérifie

$$\|\Phi(g)\|_{L^1(\mathbb{R})'} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Montrons que cette inégalité est une égalité.
Si g est la fonction nulle alors c'est bien une égalité. Supposons donc $g \neq 0$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \middle/ |g(x)| \geq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} - \frac{1}{n} \right\}$$

Notons aussi λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On a alors $\lambda(A_n) > 0$ et on distingue deux cas :

• $\underline{\lambda(A_n) < +\infty}$: dans ce cas, on note g_n l'application $x \longmapsto \text{signe}(g(x))\mathbb{1}_{A_n}(x)$ qui est alors dans $L^1(\mathbb{R})$. On a :

$$\|g_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \lambda(A_n)$$

et par définition de A_n,

$$\|\Phi(g)(g_n)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{A_n} |g| d\lambda \geq \left(\|g\|_{L^\infty} - \frac{1}{n} \right) \lambda(A_n)$$

On en déduit l'inégalité suivante

$$\|\Phi(g)\|_{L^1(\mathbb{R})} \geq \frac{\|\Phi(g)(g_n)\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\|g_n\|_{L^1(\mathbb{R})}} \geq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} - \frac{1}{n}$$

Ainsi en passant à la limite en n dans l'inégalité précédente on obtient

$$\|\Phi(g)\|_{L^1(\mathbb{R})} \geq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

et donc l'égalité recherchée.

• $\underline{\lambda(A_n) = +\infty}$: dans ce cas-ci, on utilise le caractère σ-fini de la mesure de Lebesgue pour se ramener au cas précédent. Soient $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de boréliens de mesure de Lebesgue finie telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} X_p$. Par propriété de la mesure et croissance de la suite $(X_p \cap A_n)_{p\in\mathbb{N}}$, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \lambda\left(X_p \cap A_n\right) = \lambda(A_n) > 0$$

Donc il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $\lambda(X_p \cap A_n) > 0$. Comme X_p est de mesure finie, $X_p \cap A_n$ l'est aussi. Il suffit alors de réitérer le cas précédent, en considérant $X_p \cap A_n$ au lieu de A_n.

Ainsi on a bien $\|\Phi(g)\|_{L^1(\mathbb{R})'} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ce qui assure que Φ est une isométrie.

Montrons à présent que l'application Φ est surjective.

On se fixe donc $T \in L^1(\mathbb{R})'$ et on va montrer qu'il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $T = \Phi(g)$. Pour cela, on va se ramener au cas hilbertien, en considérant des espaces L^2.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On a une injection continue de $L^1(-n,n)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ en prolongeant les applications par zéro. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit une injection continue de $L^2(-n,n)$ dans $L^1(-n,n)$. Ainsi on obtient une injection continue de $L^2(-n,n)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ en les composant, soit la suite

$$L^2(-n,n) \hookrightarrow L^1(-n,n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$$

La restriction de T à $L^2(-n,n)$ est une forme linéaire continue sur $L^2(-n,n)$. Par théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément g_n dans $L^2(-n,n)$ tel que

$$\forall \varphi \in L^2(-n,n) \quad T(\varphi) = \int_{-n}^{n} g_n(t)\varphi(t)dt$$

Comme le prolongement par zéro fournit aussi une injection continue de $L^2(-n,n)$ dans $L^2(-m,m)$, on en déduit l'égalité

$$(g_m)_{\restriction]-n,n[} = g_n$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $m \geq n$. On note alors g l'application mesurable $\liminf_n g_n$. On va montrer que g est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et qu'on a $T = \Phi(g)$.

Tout d'abord, on montre cette dernière égalité en supposant que g est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [-N,N]$. Alors on a $\varphi \in L^2(-N,N)$ et donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{-N}^{N} g_N(t)\varphi(t)dt = \int_{-N}^{N} g(t)\varphi(t)dt = \Phi(g)(\varphi)$$

car $g_{\restriction [-N,N]} = g_N$. Par continuité de T et $\Phi(g)$, et par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(R)$, on en déduit $T = \Phi(g)$.

Pour finir, on a plus qu'à montrer que l'application g est dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
Pour cela on montre qu'on a $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|T\|_{L^1(\mathbb{R})'}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on note B_p le borélien de mesure finie $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ |g(x)| > \|T\|_{L^1(\mathbb{R})'}\right\} \cap [-p,p]$. Alors l'application $\varphi : x \longmapsto \mathrm{signe}(g(x))\mathbb{1}_{B_p}(x)$ est dans $L^2(-p,p)$ et sa norme dans $L^1(\mathbb{R})$ vaut $\lambda(B_p)$. On a donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{-p}^{p} g_p(t)\varphi(t)dt = \int_{-p}^{p} g(t)\varphi(t)dt = \int_{B_p} |g(t)|dt > \|T\|_{L^1(\mathbb{R})'}\lambda(B_p) = \|T\|_{L^1(\mathbb{R})'}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

par définition de B_p. Nécessairement on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \lambda(B_p) = 0$$

et donc, comme $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} [-p, p]$, on obtient

$$\lambda(B) = \lambda(\mathbb{R} \cap B) = \lambda\left(\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} [-p, p]\right) \cap B\right) = \lambda\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} B_p\right) = \lim_{p \to +\infty} \lambda(B_p) = 0$$

car λ est une mesure et la suite (B_p) est croissante. L'inégalité $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|T\|_{L^1(\mathbb{R})'}$ s'en suit. Cela conclut.■

On généralise sans trop de difficulté cette preuve en remplaçant $\mathbb{R}$ par un intervalle ouvert.

Références

[Bon01] J.-M. Bony. *Cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Ecole Polytechnique, 2001.

[BP18] M. Briane and G. Pagès. *Théorie de l'intégration : Convolution et transformée de Fourier*. De Boeck, 7e edition, 2018.

[HL09] F. Hirsch and G. Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices*. Dunod, 2009.

[Pom98] A. Pommellet. *Cours d'analyse*. Ellipses, 1998.

[QZ20] H. Queffélec and C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation : cours et exercices corrigés*. Dunod, 5e edition, 2020.

[Sch98] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1998.