Question de cours : énoncer et démontrer le théorème de comparaison série-intégrale.

Exercice 1 :

1. Montrer que la suite de terme général

$$c_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

est convergente.

2. En déduire la somme de la série de terme général

$$u_n := \frac{1}{n(4n^2-1)}$$

Exercice 2

1. Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$$

2. En déduire que la suite $v_n := n^{-\ln(\frac{n}{2})} \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}$ converge.

<u>Question de cours</u>: énoncer et démontrer le critère de convergence des séries alternées.

<u>Exercice 1</u>:

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

pour $a \in \mathbb{R}$. (on écrira $u_n = \ln(\alpha_n) + \ln(\beta_n)$ où $\alpha_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\beta_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}}$.)

<u>Exercice 2</u>:

Considérons la suite (u_n) définie par

$$u_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{a}{\sqrt{n}}$.

Question de cours:

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

Montrer que si la série $\sum |u_n|$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer que la série de terme général

$$u_n := \frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t)\,dt$$

est convergente.

Exercice 2

1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2. Notons u_n la quantité $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Montrer qu'on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

3. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.