

Question de cours. Énoncer et démontrer une caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables.

Exercice. Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soient E un espace vectoriel et A une sous-partie de E . On appelle enveloppe convexe de A le plus petit convexe contenant A et on le note $\text{Conv}(A)$.

1. Montrer que l'enveloppe convexe de A est bien définie.
2. Montrer que $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A .
3. Supposons que E soit de dimension finie n . Alors montrer que $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de familles de $n+1$ points de A .

Exercice. Soit f une application strictement positive sur \mathbb{R}_+^* vérifiant

- a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x+1) = xf(x)$
- b. $f(0) = 1$
- c. la fonction $\ln(f)$ est convexe.

1. Considérons la fonction $\varphi := \ln(f)$. Montrer qu'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+1) = \ln(n!)$$

2. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer qu'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n) \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

3. En déduire que φ est uniquement déterminé sur $]0, 1[$.

Question de cours. Énoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$. On note $\Gamma(z)$ la quantité suivante

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que $\Gamma(z)$ est bien défini.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Exercice. Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs strictement positives. On dit que f est log-convexe si $\ln(f)$ est convexe.

1. Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe.
2. Montrer que le produit de fonctions log-convexes est une fonction log-convexe.
3. Soit f une fonction deux fois dérivable. Montrer que f est log-convexe si et seulement si pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto x^2 f(t) + 2x f'(t) + f''(t)$ est à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} .
4. En déduire que la somme de deux fonctions log-convexe deux fois dérivables est une fonction log-convexe.

Exercice. Soit f une fonction continue et convexe sur $[0, 1]$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $B_n(f)$ définie sur $[0, 1]$ par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

où $B_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $B_n(f)$ est convexe.

Question de cours. Donner la nature des intégrales $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2} dx$.

Exercice. Soient p, q dans $]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous a, b dans \mathbb{R}_+^* on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dans \mathbb{R} on a

$$\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Montrer enfin que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dans \mathbb{R} on a

$$\left(\sum_{k=0}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice. Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{C} telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt$$

2. Montrer que si de plus on a $f(1) = 0$, alors on a

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{8} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt$$