Question de cours. Dérivation d'une intégrale d'une fonction continue par rapport à l'une de ses bornes.

Exercice. Calculer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Exercice. On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Etudier les limites de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice.

1. Montrer que la fonction $f : t \longmapsto \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$. On note I son intégrale sur $]0,1[$.
2. A l'aide du développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ en 0 (demander si non vu en cours), montrer qu'on a
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$$
3. Montrer que $I = \frac{\pi^2}{2} - 4\ln(2)$.

Question de cours. Intégration des relations de comparaison (démonstration dans un des cas).

Exercice. Soit φ une fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $[0,+\infty[$.

1. Soit (λ_n) une suite de réels de limite infinie. Trouver la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\lambda_n t}\varphi(t)dt$
2. Trouver la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\sin(nt)^2dt$.

Exercice. Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'application $t\longmapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose
$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt$$
2. Montrer qu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty}x\varphi(x)=f(0)$.

Exercice. Soit a dans $]-1,+\infty[$ et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note I_n l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^a e^{-nt}}{\sqrt{1+t^b}}dt$.

a. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de la suite.
b. Trouver un équivalent de la suite (I_n) de la forme $\frac{C}{n^\alpha}$.

Exercice.

Question de cours. Fonctions positives d'intégrale nulle sur un intervalle non vide.

Exercice. On considère l'application f définie par

$$f(x) := \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1-t^2}}$$

Etudier l'ensemble de définition et la continuité de f.

Exercice.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire qu'on a
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx = \gamma$$
où γ est la limite de la suite de terme général $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
2. Montrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n],\ e^{-x} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1-x$.
3. On considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1}{t}(1-e^{-t})dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt$$
4. Montrer qu'on a $I_n - J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ et en déduire
$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt$$

Exercice.