Question de cours. Enoncer le théorème de la base adaptée.

Exercice. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Notons p_F la projection de E sur F parallèlement à G. Montrer que $Tr(p_F) = \dim(F)$

Exercice. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante, c-à-d telle que pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.

Question de cours. Donner une caractérisation de la diagonalisibilité d'un endomorphisme en terme de sous-espaces propres.

Exercice. Soit u un endomorphisme nilpotent, c-à-d tel qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$.

a. Montrer que u admet comme seule valeur propre 0.

b. Quels sont les endomorphismes nilpotents diagonalisables ?

Exercice. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$u(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$$

Pour a_0, a_1, a_2 dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, calculer $u^n(a_0 + a_1X + a_2X^2)$.

Question de cours. Enoncer le théorème du rang.

Exercice. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On considère sur E l'endomorphisme u défini par $u(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et par $u(f)(x) = f(0)$ si $x = 0$.

1. Chercher les valeurs propres et vecteurs propres de u.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est u-stable et diagonaliser u sur ce sous-espace.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $d > 0$ et soit u un endomorphisme de E.

a. Montrer que la suite $(Im(u^n))$ est décroissante et stationnaire. On définit alors

$$p := min\{k \in \mathbb{N} \ | \ Im(u^{k+1}) = Im(u^k)\ \}$$

b. Que dire de la suite $(Ker(u^n))$?

c. Montrer qu'on a $p = min\{k \in \mathbb{N} \ | \ Ker(u^{k+1}) = Ker(u^k)\ \}$.

d. Montrer que, pour tout $n \geq p$, on a

$$E = Im(u^n) \oplus Ker(u^n)$$

Exercice. Soient A,B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.