

**Question de cours.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Rappeler la définition du dual de  $E$  et montrer que  $E$  est isomorphe à son dual.

**Exercice.** Etudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

- a.  $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- b.  $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice.** a. Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions continues d'un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , convergeant simplement vers une fonction continue  $f$  sur  $I$ . Montrer que la convergence est uniforme sur  $I$ .

- b. En déduire que la suite  $(f_n)$  de fonctions définie par  $f_0(x) = 1$  et  $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$  est une suite de fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$  convergeant uniformément vers  $t \mapsto \sqrt{t}$ .

**Question de cours.** Énoncer le théorème d'interversion de limites.

**Exercice.** Etudier la convergence de la suite de fonctions définie par  $f_n(x) = \cos\left(\frac{n}{n+1}x\right)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Pour  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , on note  $T_u$  la forme linéaire sur  $\mathcal{L}(E)$  définie par  $T_u(v) = \text{Tr}(u \circ v)$ .

1. Montrer que  $u \mapsto T_u$  est un isomorphisme.
2. Soit  $\varphi$  un élément du dual  $\mathcal{L}(E)^*$  tel que  $\varphi(v \circ u) = \varphi(u \circ v)$  pour tous  $u, v$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . À l'aide de la représentation matricielle, montrer qu'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $\varphi = \lambda \text{Tr}$ .
3. En déduire que l'espace vectoriel engendré par

$$\{[u, v]; (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2\}$$

où  $[u, v] := u \circ v - v \circ u$ , est un hyperplan de  $\mathcal{L}(E)$

4. Soit  $\alpha$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . On note  $\mathcal{C}_\alpha$  l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{L}(E) \mid \alpha \circ u = u \circ \alpha\}$$

Montrer qu'on a  $\text{Tr}([\alpha, \beta] \circ \gamma) = 0$  pour tous  $\alpha, \beta$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_\alpha$ .

5. Soient  $\alpha, u$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $T_u$  s'annule sur  $\mathcal{C}_\alpha$ . Montrer qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u = [\alpha, v]$ .

**Question de cours.** Énoncer le théorème de dérivation d'une limite de suite de fonctions.

**Exercice.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que pour tous  $x, y$  dans  $E$  distincts, il existe  $\varphi$  dans  $E^*$  tel que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$  (on dit que  $E^*$  sépare les points).
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de  $E^*$  qui sépare les points est égal à  $E^*$ .

**Exercice.** Etudier la convergence simple, uniforme et uniforme sur les segments de la suite de fonctions définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f_n(x) = \int_0^1 t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$