Question de cours. Enoncer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

Exercice. Etudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

a. $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un segment I. On lui associe la suite (p_n) définie par $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$, ainsi que, si les (u_n) sont de classe $\mathcal{C}^1$, la série $\sum v_n$ donnée par $v_n = \frac{u_n'}{1+u_n}$.

a. Montrer que si $\sum u_n$ converge normalement sur I alors la suite (p_n) converge uniformément sur I. (on notera p sa limite)
b. On suppose ici que les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si de plus la série $\sum v_n$ converge normalement sur I alors (p_n) converge vers une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ et on donnera une expression de sa dérivée.

Question de cours. Enoncer le théorème d'interversion de limites.

Exercice. Montrer qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Exercice. Soient a et b des réels tels que $a<b$ et (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe un réel $M>0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a,b] \quad |f'(t)| \leq M$$

1. Montrer que si la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ alors elle y converge uniformément.
2. Etudier la convergence de la suite de fonctions définies par $f_n(t) := sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration sous le signe somme des séries de fonctions.

Exercice. Soient ζ et L les fonctions définies comme les sommes des séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

a. Donner le domaine de définition de ζ et L. Etudier la continuité et la dérivabilité.
b. Etablir une relation entre ces deux fonctions valides pour $x>1$.
c. Calculer $L(1)$ et en déduire un équivalent de ζ en 1^+.

Exercice. Soient (f_n) une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers une fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que la convergence est en fait uniforme.