INSA Institut National des Sciences Appliquées Rennes

Département de Mathématiques

Année universitaire 2021/22
2ème année **Analyse 3**
Liste 1: Intégrales généralisées

Exercice 1 Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x+1}$ et $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x-1}$ sont divergentes.

Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_2^\infty \left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$?

Exercice 2 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Exercice 3 Étudier la convergence en fonction des paramètres

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx, \quad a \text{ réel} > 0, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-tu}\sin u\, du, \qquad \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt.$$

Exercice 4 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} \text{ (faire le changement } t=\sqrt{1+x}), \qquad \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 5 Soit $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $u_n \le \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$ en comparant $\dfrac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est bornée puis convergente.

Soit f la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- pour tout entier $n \ge 2$, $f(n) = n$, $f\left(n-\frac{1}{n^3}\right) = f\left(n+\frac{1}{n^3}\right) = 0$ et f est affine sur $\left[n-\frac{1}{n^3}, n\right]$ et sur $\left[n, n+\frac{1}{n^3}\right]$,
- f est nulle ailleurs.

3. Donner l'allure du graphe de f.

4. Comparer $\displaystyle\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t)\,dt$ et u_n.

5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge bien que f soit non bornée.