

Exercice 6 Étudier la convergence des séries suivantes dont on donne le terme général :

1. $\frac{\ln n}{2^n}$,
2. $\frac{4n^2 - n + 5}{3n^5 + 2}$,
3. $\frac{1}{n^2 \ln^2 n}$,
4. $\frac{1}{\ln^2 n}$,
5. $n \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right)$,
6. $\frac{n!}{(2n)!}$,
7. $\frac{1}{n \cos^2 n}$,
8. $2^{-\sqrt{n}}$,
9. $\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$,
10. $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \ln^2 n}$,
11. $\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$,
12. $\frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n}$.

Exercice 7 Étudier la convergence des séries en fonction des paramètres

1. $a \geq 0$, $u_n = na^n$,
2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n = n^\alpha \tan \frac{1}{n}$.
3. $a, b \geq 0$, $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.
4. α, β réels, $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, série de Bertrand. On peut étudier d'abord le cas $\alpha = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ en comparant u_n à $v_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}$ pour n assez grand, puis $\alpha = 1 - \varepsilon$ avec une technique similaire, enfin $\alpha = 1$, en utilisant une comparaison série-intégrale.

Exercice 8 Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ (Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{2}{x(x+1)(x+2)}$).
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Exercice 9 On définit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n}$,
2. Étudier la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. Pour les deux dernières, on pourra commencer par l'étude de $\sum v_n - u_n$ et $\sum w_n - u_n$.

Exercice 10 On définit $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, reste de la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. En encadrant r_n par des intégrales de la fonction f définie par $f(x) = 1/x^2$, montrer que la suite (nr_n) converge vers 1.
2. Après avoir remarqué et justifié que $\frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que $s_n = r_n - 1/n$ est équivalent à $1/(2n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra encadrer s_n par les intégrales d'une fonction bien choisie.
3. Déterminer a réel tel que $t_n = r_n - 1/n - 1/(2n^2)$ est équivalent à a/n^3 en $+\infty$.