Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Réf :
- Algèbre L3, A. Szpirglas

Leçons : 159, 160, 161, 181.

Lemme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $\varphi \in M_n(\mathbb{R})'$ il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(X) = \mathrm{Tr}(MX)$$

Preuve : notons l'application linéaire

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow (M_n(\mathbb{R}))' \\ A &\longmapsto \mathrm{Tr}(A\,.\,) \end{aligned}$$

Alors Ψ est injective. En effet, pour tout $A \in \mathrm{Ker}(\Psi)$ on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad 0 = \Psi(A)(E_{ij}) = \mathrm{Tr}(A E_{ij}) = A_{j,i}$$

D'où $A = 0$.

On en déduit que Ψ est un isomorphisme.
En particulier, pour tout $\varphi \in (M_n(\mathbb{R}))'$ il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \Psi(M)$.

Cela conclut ∎

Lemme

Soit C un convexe fermé non vide de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall \varphi \in M_n(\mathbb{R})' \quad \varphi(M) \leq \sup_{N \in C} (\varphi(N))$$

Alors on a $M \in C$.

Preuve :

Supposons qu'on ait $M \notin C$.
Comme $\{M\}$ est un convexe compact non vide, le théorème de Hahn-Banach assure qu'il existe $\varphi \in (M_n(\mathbb{R}))'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sup_{N \in C} \varphi(N) \leqslant \alpha < \varphi(M)$$

(On peut séparer strictement $\{M\}$ et C). Cela est absurde par hypothèse. ∎

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$. (pour la norme $\|.\|_2$)

Preuve :

Notons $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

Etape 1 : $\mathcal{C} \subset \overline{B(0,1)}$

La boule unité fermée est un convexe contenant $O_n(\mathbb{R})$
En effet, pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|M\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Mx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$$

Etape 2 : $\overline{B(0,1)} \subset \mathcal{C}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\|_2 \leqslant 1$.
Soit $\varphi \in M_n(\mathbb{R})'$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall X \in M_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(X) = \operatorname{Tr}(AX)$$

La décomposition polaire de A assure qu'il existe (U, R) dans $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = UR$

Comme R est symétrique, il existe une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de R.

Alors on a

$$\mathrm{Tr}(AU^{-1}) = \mathrm{Tr}(URU^{-1}) = \mathrm{Tr}(R) = \sum_{i=1}^{n} \|Re_i\|_2$$

et donc

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(MA) \overset{(e_i)\text{ base ortho}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, {}^tMe_i\rangle$$

$$'' \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \|{}^tMe_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|URe_i\|_2 \|{}^tMe_i\|_2$$

$$'' \leq \sum_{i=1}^{n} \|Re_i\|_2 \|{}^tMe_i\|_2 \underset{\begin{cases}\|M\|_2\leq 1\\ \|e_i\|_2 = 1\end{cases}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|Re_i\|_2 = \mathrm{Tr}(AU^{-1})$$

puis $\mathrm{Tr}(AM) \leq \mathrm{Tr}(AU^{-1}) \leq \sup\limits_{G\in\mathcal{C}} \mathrm{Tr}(AG)$

D'après ce qui précède, on obtient $M \in \mathcal{C}$.

Cela conclut ■

Définition (point extrémal)

Soit P une partie d'un espace vectoriel E.
On dit que $x \in P$ est un point extrémal de P si pour tout segment dans P contenant x, x est une extrémité de ce segment.

Proposition

Les points extrêmaux de $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ sont les points de $O_n(\mathbb{R})$.

Preuve: par le théorème de Carathéodory, tout point de $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est combinaison convexe d'au plus n^2+1 points de $O_n(\mathbb{R})$. Ainsi tout point extrémal de $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est dans

$O_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrons que A est extrémal.

Supposons que A est strictement contenu dans un segment de $\overline{B(0,1)}$. Soient U, V dans $\overline{B(0,1)}$ et $t \in]0,1[$ tels que

$$A = tU + (1-t)V \quad , \quad A \notin \{U, V\}$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$, on obtient

$$1 = \|Ax\|_2 \leqslant \|tUx\|_2 + (1-t)\|Vx\|_2 \leqslant 1$$

Ainsi on a $\| tUx + (1-t)Vx \|_2 = \|tUx\|_2 + \|(1-t)Vx\|_2$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$Ux = \lambda Vx$$

Par ailleurs, l'égalité dans l'inégalité précédente assure qu'on a aussi

$$\|Ux\|_2 = \|Vx\|_2 = 1$$

On en déduit $\lambda = 1$, puis $Ux = Vx$, donc $U = V$ ↯

Cela conclut ∎

<u>Rmq</u>: on peut se passer de l'égalité $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B(0,1)}$ et montrer que les points extrémaux de $\overline{B(0,1)}$ sont les points de $O_n(\mathbb{R})$.

En effet, soit $u \in \overline{B(0,1)}$ u extrémal. Par la décomposition polaire, il existe $\omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $s \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $u = \omega s$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de s. Soit $p \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$s = p \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, {}^t p$$

Montrons qu'on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$. Supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 1$.

Comme $s \in S_n(\mathbb{R})$, on a $\|s\|_2 = \rho(s)$. De plus, on a aussi

$$\|s\|_2 = \|\omega^{-1} u\|_2 \leqslant \|\omega^{-1}\|_2 \|u\|_2 \leqslant 1.$$

D'où $\lambda_i < 1$. On a alors (en supposant $i=1$)

$$u = \frac{1}{2}\left(\omega p \operatorname{diag}(2\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t p + \omega p \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t p\right)$$

Comme $\lambda_1 < 1$, on a $2\lambda_1 - 1 < 1$ et donc

$$p \operatorname{diag}(2\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t p \quad , \quad p \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t p$$

sont la boule unité car $\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \leq 1$, et leurs images par

$$a \longmapsto \omega a$$

sont différentes de u. Contradiction car u est extrémal $\lightning$.
Nécessairement $s = 1$ et donc $u \in O_n(\mathbb{R})$.

Par théorème de Krein-Milman on obtient alors

$$\overline{B(0,1)} = \operatorname{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$$

Théorème

Soient A et B des parties d'un espace de Hilbert H, convexes et non vides.
Supposons A fermé, B compact et tel que $A \cap B = \emptyset$.
Alors il existe un hyperplan affine qui sépare strictement A et B.

Preuve: on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x - \pi_A(x)\| \end{array}$$

Comme π_A est continue, f l'est aussi. Par compacité de B, on obtient qu'il existe $x^* \in B$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in B} f(x)$

Notons v le vecteur $x^* - \pi_A(x^*)$, δ la norme de v et α la la quantité $\langle \pi_A(x^*), v \rangle + \frac{1}{2}\delta^2$.

Alors pour tout $y \in A$ on a

$$\langle y, v \rangle = \langle y - \pi_A(x^*), v \rangle + \langle \pi_A(x^*), v \rangle$$
$$\leqslant \quad 0 \quad + \alpha - \frac{1}{2}\delta^2 < \alpha$$

car $x^* \in B$ et $\delta > 0$ car $A \cap B = \emptyset$.

Ainsi on obtient

$$A \subset \{ x \in H / \langle x, v \rangle < \alpha \}$$

Notons y^* le projeté $\pi_A(x^*) \in A$. On a alors

$$\| \pi_B(y^*) - y^* \| = \min_{z \in B} \| z - y^* \| \leqslant \| x^* - y^* \| = \min_{x \in B} F(x)$$
$$\leqslant \min_{x \in B} \| x - \pi_A(x) \| \leqslant \| \pi_B(y^*) - \pi_A(\pi_B(y^*)) \|$$
$$\leqslant \min_{y \in A} \| \pi_B(y^*) - y \| \leqslant \| \pi_B(y^*) - y^* \|$$

D'où $\| x^* - y^* \| = \| y^* - \pi_B(y^*) \|$ d'où $x^* = \pi_B(y^*)$ par unicité du projeté $(x^* \in B)$

Il s'en suit, pour tout $x \in B$,

$$\langle x, v \rangle = \langle x, x^* - \pi_A(x^*) \rangle = \langle x, \pi_B(y^*) - y^* \rangle$$
$$= - \langle x - \pi_B(y^*), y^* - \pi_B(y^*) \rangle - \langle \pi_B(y^*), y^* - \pi_B(y^*) \rangle$$
$$\geqslant 0 - \langle \pi_B(y^*), y^* - \pi_B(y^*) \rangle$$
$$\geqslant \langle y^* - \pi_B(y^*), y^* - \pi_B(y^*) \rangle - \langle y^*, y^* - \pi_B(y^*) \rangle$$
$$\geqslant \langle \pi_A(x^*) - x^*, \pi_A(x^*) - x^* \rangle - \langle \pi_A(x^*), \pi_A(x^*) - x^* \rangle$$
$$\geqslant \| \pi_A(x^*) - x^* \|^2 + \langle \pi_A(x^*), v \rangle$$
$$\geqslant \delta^2 + \alpha - \frac{1}{2}\delta^2 = \alpha + \frac{1}{2}\delta^2 > \alpha$$

Cela conclut : $H(\alpha, v) = \{ x \in H / \langle x, v \rangle = \alpha \}$ sépare A et B strictement ∎