Sous-groupes distingués et noyaux de caractères

Réf :
- Algèbre discrète de la transformée de Fourier, G. Peyré

Leçons : 103, 107, 153, 154.

Soit G un groupe fini.

Lemme

Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation de G de caractère χ de dimension finie.

Alors on a $\operatorname{Ker}(\rho) = \{ g \in G \,/\, \chi(g) = \chi(1) \}$

on l'appelle noyau de χ et on le note $\operatorname{Ker}(\chi)$

Preuve :

Notons n le cardinal de G et d la dimension de V.

On a

$$\forall g \in G \qquad \rho(g)^n - I_d = 0$$

donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de $\rho(G)$.

Il est scindé et à racines simples.

On en déduit que pour tout $g \in G$ $\rho(g)$ est diagonalisable.

Notons $\omega_1, \dots, \omega_d$ les valeurs propres de $\rho(g)$ pour $g \in G$ fixé.

Ce sont des racines de l'unité.

Supposons qu'on ait $\chi(g) = \chi(1)$. Alors on a

$$\sum_{j=1}^{d} \omega_j = d$$

Nécessairement on obtient $\omega_1 = \dots = \omega_d = 1$, c-à-d $\rho(g) = I_d$.

Cela conclut ■

Théorème

Tout sous-groupe distingué de G est une intersection de noyaux de caractères irréductibles de G.

Preuve :

Soit H un sous-groupe distingué de G.
On considère la représentation (ρ, V) de G/H par permutation et π le morphisme quotient $G \twoheadrightarrow G/H$
Notons $\tilde{\rho}$ le morphisme $\rho \circ \pi$ et χ_V le caractère de G associé

Soit $g \in G$. On a alors

$$\tilde{\rho}(g) = Id_V \iff \rho(\pi(g)) = Id_V \iff \pi(g) \in Ker(\rho)$$

Or le noyau de ρ est exactement $\{H\}$ d'où

$$\tilde{\rho}(g) = Id_V \iff \pi(g) = H \iff g \in H$$

c-à-d $Ker(\tilde{\rho}) = H$, ou $Ker(\chi_V) = H$.
Notons $\chi_1, \dots, \chi_m$ les caractères irréductibles de G.
Soient $a_1, \dots, a_m$ dans $\mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=1}^m a_i \chi_i = \chi_V$.
Montrons qu'on a

$$Ker(\chi_V) = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a_i \neq 0}}^m Ker(\chi_i)$$

et cela conclura.

Soit $g \in G$. Supposons qu'on ait

$$\forall i \in [\![1, m]\!] \qquad a_i \chi_i(g) = a_i \chi_i(1)$$

Alors on a $\chi_V(g) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_i(g) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_i(1) = \chi_V(1)$

Réciproquement, supposons qu'on ait $\chi_V(g) = \chi_V(1)$.

On a alors

$$|\chi_V(g)| \leq \sum_{i=1}^{m} a_i |\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^{m} a_i |\chi_i(1)| = \chi_V(1) = |\chi_V(g)|$$

les valeurs propres de ρ_{χ_i} sont des racines de l'unité

On en déduit $\forall i \in [\![1, m]\!] \quad a_i \chi_i(g) = a_i \chi_i(1)$

NB: c'est une égalité dans l'inégalité triangulaire et les $\chi_i(g)$ sont de module 1.

Cela conclut ■

Exercice (sur les noyaux)

Soit G un groupe fini.
Supposons qu'il existe χ un caractère irréductible de G tel que $\mathrm{Ker}(\chi) = \{1\}$.
Montrons que $Z(G)$ est cyclique.

↳ Notons (V, ρ) une représentation associée à χ. On a alors

$$\mathrm{Ker}(\chi) = \mathrm{Ker}(\rho)$$

et donc $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ est injectif.

Etape 1: lemme de Schur.

Soit $g \in Z(G)$. Alors le morphisme $\rho(g)$ est G-équivariant.
En effet, on a

$$\forall h \in G \qquad \rho(h) \circ \rho(g) = \rho(hg) \overset{g \in Z(G) \text{ commute avec } h.}{=} \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$$

Comme V est une représentation irréductible, le lemme de Schur assure qu'il existe $\lambda(g) \in \mathbb{C}^{\times}$ tel que

$$\rho(g) = \lambda(g)\, \mathrm{id}_V$$

Etape 2 : injection dans $\mathbb{C}^\times$, groupe cyclique.

L'application $\lambda : Z(G) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ est un morphisme de groupes injectif.

En effet, pour tous g, h dans $Z(G)$ on a

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$$

et donc $\lambda(gh) = \lambda(g) \times \lambda(h)$, puis on a

$$\lambda(g) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \rho(g) = id_V$$

Comme $\mathbb{C}^\times$ est cyclique, on en déduit que $Z(G)$ est cyclique.

Rmq : étant donné une table de caractère d'un groupe, on peut déterminer ses sous-groupes distingués et si son centre est cyclique.

Par exemple, la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ ci-dessous

	1	6	8	6	3
	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

donné par la signature

$\mathrm{Ker}(\chi_2) \cap \mathrm{Ker}(\chi_5) = V_4$

nous permet de voir que la classe de conjugaison de $(12)(34)$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$: on a en effet

$$\mathrm{Ker}(\chi_2) \cap \mathrm{Ker}(\chi_5) = \{ g \in \mathfrak{S}_4 \,/\, \chi_2(g) = 1 \text{ et } \chi_5(g) = 2 \}$$

$$= \{ g \in \mathfrak{A}_4 \,/\, \chi_5(g) = 2 \} = \langle (12)(34) \rangle = V_4$$

De plus, on a, par exemple,

$$\mathrm{Ker}(\chi_4) = \{ g \in \mathfrak{S}_4 \,/\, \chi_4(g) = 3 \}$$
$$\quad \text{"} \quad = \{ id \}$$

donc $Z(\mathfrak{S}_4)$ est cyclique.