Théorème de Cartan-von Neumann

Réf :
- Calcul différentiel, S. Gonnord

Leçons : 106, 156, 214, 215

Théorème

Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.
Alors G est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Preuve :

Étape 1 : Notons $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble

$$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall t \in \mathbb{R} \ \exp(tA) \in G\}$$

Montrons que $\mathcal{L}(G)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

- Soit $A \in \mathcal{L}(G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\lambda t \in \mathbb{R}$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exp(\lambda t A) \in G$. D'où $\lambda A \in \mathcal{L}(G)$.

- Soient $A, B \in \mathcal{L}(G)$. Pour montrer que $A+B \in \mathcal{L}(G)$, on utilise le lemme suivant :

Lemme : pour tout $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \exp(A+B)$$

que l'on démontrera par la suite.

Fort de ce lemme, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{tA}{n}\right)\exp\left(\frac{tB}{n}\right)\right)^n = \exp(t(A+B))$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$. Or comme A et B sont dans $\mathcal{L}(G)$ on a

$$\forall t\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ \left(\exp\left(\frac{tA}{n}\right)\exp\left(\frac{tB}{n}\right)\right)^n \in G$$

Donc, comme G est fermé, on en déduit

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \exp(t(A+B))\in G$$

et ainsi $A+B\in\mathcal{L}(G)$. Cela conclut l'étape 1.

<u>Etape 2</u>: Soit S un supplémentaire de $\mathcal{L}(G)$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(G)\oplus S & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ \ell + s & \longmapsto & e^{\ell}e^{s} \end{array}$$

Alors φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et on a

$$d\varphi(0) = I_n$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Dans la suite, on va montrer qu'il existe un ouvert $V\subset U$, voisinage de 0, tel que

$$\varphi(V\cap\mathcal{L}(G)) = \varphi(V)\cap G.$$

et ainsi $\varphi : V\cap\mathcal{L}(G) \xrightarrow{\sim} \varphi(V)\cap G$ sera un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Etape 3 : on montre l'égalité annoncée.

On a $\forall A \in \mathcal{L}(G)$ $e^A \in G$, donc $\varphi(\mathcal{L}(G)) \subset G$ et ainsi on obtient $\varphi(U \cap \mathcal{L}(G)) \subset \varphi(U) \cap \varphi(\mathcal{L}(G)) \subset \varphi(U) \cap G$
On en déduit $\varphi(V \cap \mathcal{L}(G)) \subset \varphi(V) \cap G$ pour tout $V \subset U$.

Pour l'autre inclusion, on montre tout d'abord qu'on a

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \ \forall x_k \in B(0, \tfrac{1}{k}) \ (\varphi(x_k) \in G \Rightarrow x_k \in \mathcal{L}(G))$$

Supposons le contraire. Alors il existe deux suites $(\ell_k) \in \mathcal{L}(G)^{\mathbb{N}}$ et $(s_k) \in (S \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ de limites nulles telles que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi(\ell_k + s_k) \in G.$$

On en déduit $\forall k \in \mathbb{N}$ $e^{s_k} \in G$.

Considérons la suite $\left(\frac{s_k}{\|s_k\|}\right)$ d'éléments de norme 1.
Comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, quitte à considérer une sous-suite, il existe $s \in S \setminus \{0\}$ tel que

$$\frac{s_k}{\|s_k\|} \xrightarrow[k \to +\infty]{} s$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $e^{ts} = \lim\limits_{k \to +\infty} \exp\left(\frac{t}{\|s_k\|} s_k\right)$.
Soit $\frac{t}{\|s_k\|}$ est entier et dans ce cas $e^{ts} \in G$ comme fermé
Soit $\frac{t}{\|s_k\|}$ est la somme d'un entier et d'un nombre $\mu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

et comme $s_k \longrightarrow 0$ on en déduit de même $e^{ts} \in G$
D'où $s \in \mathcal{L}(G)$.

On en déduit $s = 0$ $\lightning$ Contradiction.

Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(0,\frac{1}{k}) \cap \varphi^{-1}(G) \subset \mathcal{L}(G)$
Quitte à considérer k plus grand, on peut supposer

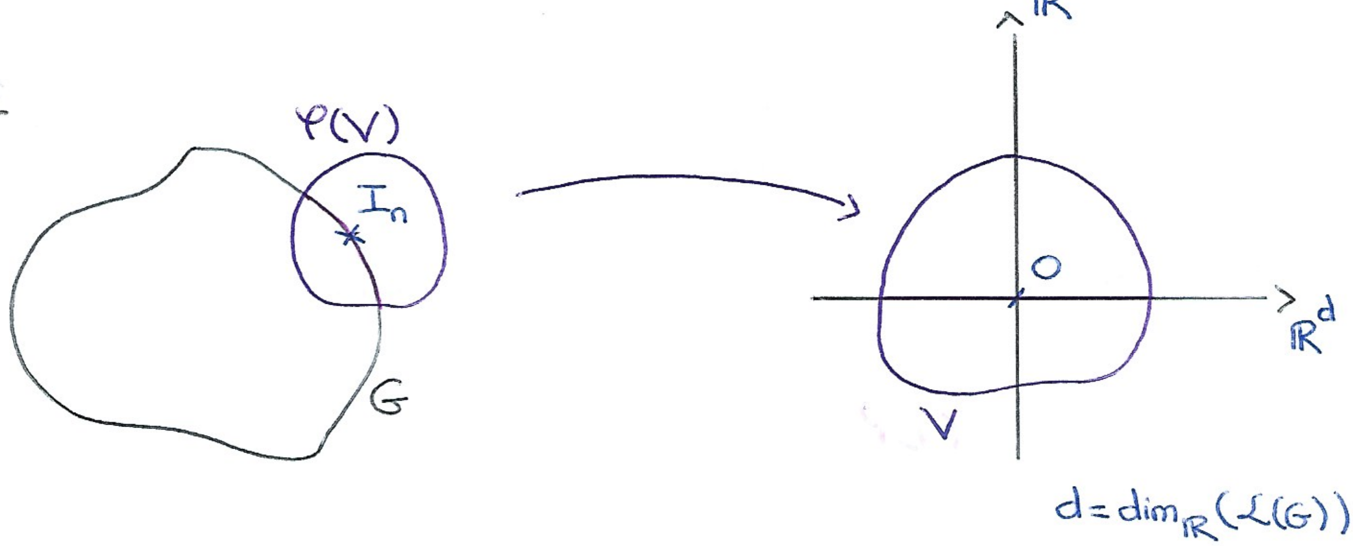
$$B(0,\tfrac{1}{k}) \subset U$$

Notons V l'ouvert $B(0,\frac{1}{k})$. Alors on a

$$\underset{\varphi(V)\cap G}{\underset{\cup}{\varphi(V \cap \varphi^{-1}(G))}} \subset \varphi(\mathcal{L}(G) \cap V)$$

Ce qui conclut l'étape 3.

<u>Etape 4:</u>



Notons ψ l'application réciproque de $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$. Alors l'application $\psi : \varphi(V) \xrightarrow{\sim} V$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et vérifie $\psi(I_n) = 0$, $\psi(\varphi(V) \cap G) = V \cap \mathcal{L}(G)$
Quitte à composer par un difféomorphisme, on a

$$\psi(\varphi(V) \cap G) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n^2-d})$$

Cela conclut ✱ (+ par régularité des lois de groupes).