Théorème de structure des groupes abéliens finis

Réf:
- Eléments d'analyse et d'algèbre, P. Colmez

Leçons: 102, 104, 107, 120, 142.

Lemme

Soit G un groupe abélien fini.
Alors G et $\hat{G}$ ont le même exposant.

Preuve:

Notons $N(H)$ l'exposant d'un groupe abélien fini H.
On a pour tout $\chi \in \hat{H}$ et pour tout $x \in H$

$$\chi^{N(H)}(x) = \chi(x^{N(H)}) = \chi(1) = 1$$

D'où $\chi^{N(H)} = 1$ puis $N(\hat{H})$ divise $N(H)$. Comme on a un isomorphisme $\hat{\hat{G}} \simeq G$, on en déduit

$$N(G) = N(\hat{\hat{G}}) \leqslant N(\hat{G}) \leqslant N(G)$$

ce qui conclut ∎

Théorème

Soit G un groupe abélien fini.
Alors il existe $N_1, \dots, N_r$ des entiers, avec N_1 l'exposant de G tel que $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$ $N_{i+1} | N_i$ et $G \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$

Preuve:

On procède par récurrence sur le cardinal du groupe.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout groupe abélien d'ordre inférieur à n on a la décomposition annoncée.
Soit G un groupe abélien d'ordre $n+1$, notons N_1 son exposant.
Pour tout $\chi \in \hat{G}$ et tout $x \in G$, on a alors

$$\chi^{N_1}(x) = 1$$

donc $\chi(x)$ est une racine N_1-ième de l'unité.

De plus, comme N_1 est aussi l'exposant de $\hat{G}$, il existe χ_1 dans $\hat{G}$ d'ordre N_1 et alors le groupe cyclique $\chi_1(G)$ n'est autre que le groupe des racines N_1-ième de l'unité.

En effet, supposons qu'on ait $\# \chi_1(G) < N_1$. Alors on a

$$\forall x \in G \quad \chi_1^d(x) = 1 \qquad \text{où } d = \# \chi_1(G)$$

ce qui contredit le fait que χ_1 soit d'ordre N_1.

Donc $\# \chi_1(G) = N_1$.

Soit $x_1 \in G$ tel que $\chi_1(x_1)$ soit une racine primitive N_1-ième de l'unité, c-à-d tel que $\chi_1(x_1) = e^{\frac{2i\pi}{N_1}}$ (par exemple)

Or l'ordre de x_1 divise N_1 par définition de l'exposant, donc on a $\mathrm{ord}_G(x_1) = N_1$ car $\mathrm{ord}_{\mathbb{C}}(\chi_1(x_1)) \mid \mathrm{ord}_G(x_1)$.

Notons H_1 le sous-groupe engendré par x_1.

Montrons que G est somme directe de H_1 et $\ker(\chi_1)$.

On conclut alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\ker(\chi_1) \neq G$. ($\# \ker(\chi_1) \mid N_1$) (en supposant G non cyclique)

L'application $\chi_1 : H_1 \xrightarrow{\sim} \mu_{N_1}$ est un isomorphisme.

Notons α son inverse.

Soit $x \in G$. Alors on a

$$\alpha(\chi_1(x)) \in H_1 \quad \text{et} \quad \chi_1(\alpha(\chi_1(x))^{-1} x) = \chi_1(\alpha(\chi_1(x)))^{-1} \chi_1(x)$$

$$= \chi_1(x)^{-1} \chi_1(x)$$

$$= 1$$

donc $\alpha(\chi_1(x))^{-1} x \in \mathrm{Ker}(\chi_1)$. D'où $G = H_1 + \mathrm{Ker}(\chi_1)$

De plus, comme χ_1 est injectif sur H_1 on a $H_1 \cap \mathrm{Ker}(\chi_1) = \{1\}$

Cela conclut ■