Calcul d'une intégrale avec des séries entières

Réf. :
- Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, M. El Amrani

Leçons : 230, 236.

Théorème

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx$ est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Preuve :

Etape 1 : Convergence

La fonction $x \longmapsto \frac{x}{ch(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc intégrable en 0 et localement intégable sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, on a l'équivalent suivant en $+\infty$

$$\frac{x}{ch(x)} \sim \frac{2x}{e^x + e^{-x}} \sim \frac{2x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Comme $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, on en déduit que $x \longmapsto \frac{x}{ch(x)}$ l'est aussi par théorème d'équivalence pour les fonctions positives.

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx$ est convergente.

Etape 2 : on effectue le changement de variable $u = e^{-x}$ dans l'intégrale. pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}(x)}\,dx = -2\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du$$

On utilise alors le développement en série entière de la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ sur $B(0,1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n l'application

$$\begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (-1)^n \, u^{2n} \ln(u) \end{array}$$

que l'on prolonge en 0 avec $f_n(0) = 0$. Alors f_n est continue sur $[0,1]$.

La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction

$$u \longmapsto \frac{\ln(u)}{1+u^2} \qquad \Big\| \; \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(1) = 0$$

sur $]0,1[$ par critère de Leibniz.

Soit $u \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $R_n(u)$ le reste de la série numérique $\sum f_n(u)$. On a alors, par Leibniz,

$$|R_n(u)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \, u^{2k} \ln(u) \Big| \leqslant -u^{2n+2} \ln(u)$$

Notons g l'application $x \longmapsto -x^{2n+2}\ln(x)$. Alors g est dérivable sur $]0,1[$ et on a

$$\forall x \in]0,1[\quad g'(x) = -(2n+2)\,x^{2n+1}\ln(x) - x^{2n+1}$$
$$ = -x^{2n+1}\big(1 + (2n+2)\ln(x)\big)$$

donc g' s'annule uniquement en $e^{\frac{-1}{2n+2}}$ et c'est un maximum.

On en déduit

$$\forall u \in]0,1[\quad |R_n(u)| \leqslant g\big(e^{\frac{-1}{2n+2}}\big) = \frac{e^{-1}}{2n+2}$$

et donc (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

On obtient que la série $\sum F_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

On peut alors intervertir.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\,du = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 u^{2n}\ln(u)\,du$$

où
$$\int_0^1 u^{2n}\ln(u)\,du = \left[\frac{u^{2n+1}\ln(u)}{2n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 u^{2n}\,du$$
$$= -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
-2\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du &= -2\int_0^1 \ln(u)\,du - 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\,du \\
&= -2\int_0^1 \ln(u)\,du + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\
&= -2\left[u\ln(u) - u\right]_0^1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\
&= 2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

Cela conclut ■