Densité dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ des fonctions nulle part dérivables.

Ref: Analyse pour l'agrégation, H. Queffélec

Leçons : 205, 228

Proposition

L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ contient un G_δ dense de $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Preuve :

Idée : Montrer que A contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et conclure avec le théorème de Baire ($(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ complet)

Notons B le complémentaire de A, et F_n l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \,/\, \exists x \in [0,1] \ \forall y \in [0,1] \ |f(y)-f(x)| \leq n|x-y| \right\}$$

(f dérivable en $x_0 \longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ borné $h \to 0$.)

On a $B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$.

On va montrer que les (F_n) sont fermés d'intérieur vide. Alors par Baire, B sera d'intérieur vide c-à-d

$$\overline{A} = \overline{\complement B} = \complement \mathring{B} = \mathcal{C}^0([0,1])$$

On montre en fait que le complémentaire de A contient un F_σ.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(*) F_n fermé : soit (f_k) une suite d'éléments de F_n qui converge vers $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Par propriété de F_n, on a une suite $(x_k) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \forall y \in [0,1] \quad |f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$$

- Comme $[0,1]$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\bar{x} \in [0,1]$ tels que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{\varphi(k)} = \bar{x}$.

- Montrons que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(f_{\varphi(k)}(y) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) \right) = f(y) - f(\bar{x})$ pour tout $y \in [0,1]$

et par passage à la limite dans l'inégalité on aura $f \in F_n$.

↳ soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$|f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(\bar{x})| \leqslant |f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(x_{\varphi(k)})| + |f(x_{\varphi(k)}) - f(\bar{x})|$$

$$\leqslant \|f_{\varphi(k)} - f\|_\infty + |f(x_{\varphi(k)}) - f(\bar{x})|$$

Par continuité de f, on obtient $\lim\limits_{k \to +\infty} f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) = f(\bar{x})$.

De plus, comme $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\|.\|_\infty} f$, on a en particulier $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{c.s.} f$

donc $\forall y \in [0,1] \quad \lim\limits_{k \to +\infty} f_{\varphi(k)}(y) = f(y)$. D'où le résultat annoncé.

(*) $\underline{\mathring{F}_n = \emptyset}$: on va montrer que toute boule centrée en un élément de F_n n'est pas incluse dans F_n, ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall f \in F_n \quad \exists g \in \complement F_n \quad \|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

Un tel élément g vérifie $\forall x \in [0,1] \ \exists y \in [0,1] \quad |g(x) - g(y)| > n|x-y|$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in F_n$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on note M la quantité $\sup\limits_{x \in [0,1]} |P'(x)| < +\infty$

<u>Idée</u> : P est assez proche de f mais on n'a pas plus d'info. On va donc prendre $g = P + g_0$ où g_0 est continue, vérifie $\|g_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ et

$$\forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \qquad |g_0(y) - g_0(x)| - |P(x) - P(y)| > (n+1)|x-y|$$

Comme $|P(x) - P(y)| \leqslant M|x-y|$, il suffit d'avoir

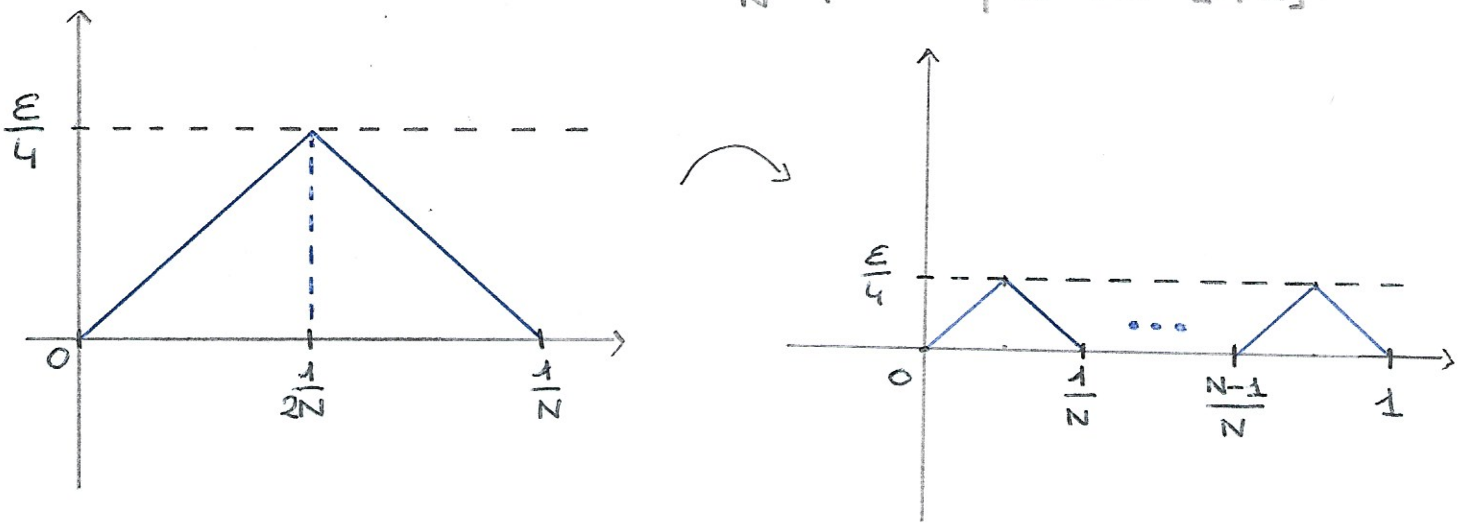
$$|g_0(y) - g_0(x)| > (M+n+1)|x-y|$$

<u>Forme simple</u> : g_0 affine par morceaux.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\varepsilon}{2} N > (M+n+1)$. Définissons g_0 de la manière suivante sur $[0, \frac{1}{N}]$

$$g_0(x) := \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2N}] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in [\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}] \end{cases}$$

et étendons-la en une fonction $\frac{1}{N}$-périodique sur $[0,1]$.



La fonction g_0 est continue sur $[0,1]$ et vérifie

$$\|g_0\|_\infty = \frac{\varepsilon}{4}$$

Notons g la fonction $P + g_0$. On a alors $\|g-f\|_\infty \leq \overbrace{\|P-f\|_\infty}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{\|g_0\|_\infty}^{\leq \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon$.

On a pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)| \\ &\geq |g_0(x) - g_0(y)| - M|x-y| \end{aligned}$$

et de plus pour tout $x \in [0,1]$ on peut prendre $y \in [0,1]$ vérifiant $|g_0(x) - g_0(y)| \geq \frac{N}{2}\varepsilon|x-y| > (M+n+1)|x-y|$.

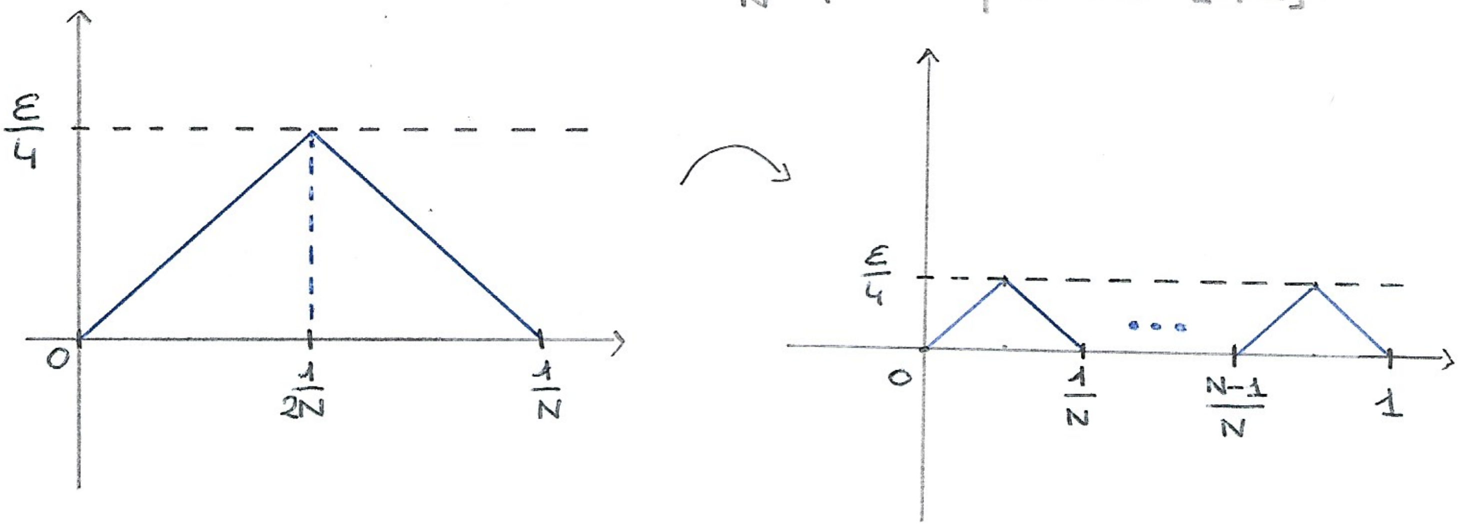
D'où $g \in \complement F_n$. Au final, on obtient $\mathring{F}_n = \emptyset$.

Cela conclut ∎

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\varepsilon}{2} N > (M+n+1)$. Définissons g_0 de la manière suivante sur $[0, \frac{1}{N}]$

$$g_0(x) := \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2N}] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in [\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}] \end{cases}$$

et étendons-la en une fonction $\frac{1}{N}$-périodique sur $[0,1]$.



La fonction g_0 est continue sur $[0,1]$ et vérifie

$$\|g_0\|_\infty = \frac{\varepsilon}{4}$$

Notons g la fonction $P + g_0$. On a alors $\|g-f\|_\infty \leq \overbrace{\|P-f\|_\infty}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{\|g_0\|_\infty}^{\leq \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon$.

On a pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)| \\ &\geq |g_0(x) - g_0(y)| - M|x-y| \end{aligned}$$

et de plus pour tout $x \in [0,1]$ on peut prendre $y \in [0,1]$ vérifiant $|g_0(x) - g_0(y)| \geq \frac{N}{2}\varepsilon |x-y| > (M+n+1)|x-y|$.

D'où $g \in \complement F_n$. Au final, on obtient $\mathring{F}_n = \emptyset$.

Cela conclut ∎