Espaces de Bergman

Réf :
- Analyse complexe M. Queffélec

Leçons : 201, 205, 208, 213, 235, 243, 234.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Définition (espace de Hilbert de fonctions analytiques)

Soit H un espace de fonctions analytiques sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, de Hilbert.
Si pour tout $a \in \Omega$ l'application d'évaluation en a

$$\delta_a : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

est continue alors on appelle espace de Hilbert de fonctions analytiques l'ensemble H.

Proposition

Soit $a \in H$. Alors il existe une unique fonction $K_a \in H$ telle que

$$\forall f \in H \quad f(a) = \langle f, K_a \rangle_H$$

avec $\| \delta_a \|_{H'} = \| K_a \|_H$.

Preuve : l'application δ_a étant un élément de H', le théorème de représentation de Riesz assure l'existence d'une fonction K_a dans H telle que

$$\forall f \in H \quad \langle f, K_a \rangle_H = \delta_a(f) = f(a)$$

et avec $\| K_a \|_H = \| \delta_a \|_{H'}$. ■

Rmq : l'application $(z,a) \longmapsto K_a(z) = K(z,a)$ vérifie le fait suivant : pour tout $a \in \Omega$ $z \mapsto K(z,a)$ est holomorphe sur Ω et pour tout $z \in \Omega$ $a \mapsto \overline{K(z,a)}$ est holomorphe sur Ω.

↳ pour le deuxième point, on a en effet

$$\forall a \in \Omega \quad K_a(z) = \langle K_a, K_z \rangle = \overline{\langle K_z, K_a \rangle} = \overline{K_z(a)}$$

Pour tout $a \in \Omega$, on appelle la fonction K_a le noyau reproduisant de H en a.

Proposition

Soit H un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ non vide, de noyau reproduisant K.
Alors

(i) H est séparable

(ii) Si (e_n) est une base orthonormale de H alors on a

$$K_a(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(a)}$$

où la série converge dans H et a fortiori dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

(iii) Pour tout $a \in \Omega$ $K_a(a) = \|K_a\|_H^2$

(iv) Pour tout compact L de Ω, on a

$$\sup_{a \in L} \|K_a\|^2 < +\infty$$

(v) L'application

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow H \\ a &\longmapsto K_a \end{aligned}$$

est continue.

(vi) Le système $(K_a)_{a\in\Omega}$ est hyper total dans H.

Preuve :

(i) Soit $a \in \Omega$ et (a_n) une suite de points distincts de Ω convergeant vers a.
Notons V le sous-espace fermé de H engendré par $(K_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrons qu'on a $V^{\perp} = \{0\}$.

Le théorème de Banach-Steinhaus assure alors qu'on a

$$\sup_{a\in L} \|\delta_a\|_{H'} = \sup_{a\in L} \|K_a\|_H < +\infty$$

(5) Soit L un compact de Ω. Notons $M_L = \sup_{a\in L} \|K_a\|_H$.
Soit $f \in H$ tel que $\|f\|_H \leq 1$ et soit $a \in L$. On a

$$|f(a)| = |\langle f, K_a\rangle| \leq \|f\|_H \|K_a\| \leq M_L$$

et donc $\|f\|_{L,\infty} \leq M_L < +\infty$.

Ainsi la boule unité B de H est une famille normale, et donc en particulier équicontinue sur tout compact de Ω.

Montrons à présent la continuité de $x \mapsto K_x$ en tout point de Ω.
Soit $a \in \Omega$ et (a_n) une suite d'éléments de Ω qui converge vers a.
Considérons le compact $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$, noté L.
Alors comme B est équicontinue sur L, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{f\in B} |f(a_n) - f(a)| = 0$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|K_{a_n}\| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{f\in B} |f(a_n)| = \sup_{f\in B} |f(a)| = \|K_a\|$

De plus, on a

$$\forall f \in H \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle f, K_{a_n}\rangle = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a) = \langle f, K_a\rangle$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \|K_{a_n} - K_a\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\|K_{a_n}\|^2 + \|K_{a_n}\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle K_a, K_{a_n}\rangle \right)$$
$$= 2\|K_a\|^2 - 2\langle K_a, K_a\rangle = 0$$

ce qui conclut ∎

Soit $f \in V^{\perp}$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) = \langle f, K_{a_n} \rangle = 0$$

et donc $f = 0$ par théorème des zéros isolés.

Ainsi on a bien $V^{\perp} = \{0\}$. Comme V est un sev fermé de H on en déduit $V = H$.

La séparabilité de H se déduit alors de celle de V.

(II) Soit (e_n) une base hilbertienne de H. Soit $a \in \Omega$.

Alors on a

$$K_a = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle K_a, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(a)} e_n$$

dans H.

Remarque: la convergence dans H entraîne la convergence sur tout compact de Ω.

En effet, soit (f_n) une suite d'éléments de H qui converge vers $f \in H$. Montrons que (f_n) converge vers f dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Soit L un compact de Ω. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f\|_{L,\infty} = \sup_{x \in L} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in L} |\langle f_n - f, K_x \rangle|$$

$$\leqslant \sup_{x \in L} \|K_x\|_H \, \|f_n - f\|_H$$

Reste à montrer que l'on a $\sup_{x \in L} \|K_x\|_H < +\infty$.

(III) On a

$$\forall a \in \Omega \quad K_a(a) = \langle K_a, K_a \rangle = \|K_a\|_H^2$$

(IV) Soit L un compact de Ω. Alors pour tout $f \in H$ on a

$$\sup_{a \in L} |\delta_a(f)| = \sup_{a \in L} |f(a)| < +\infty$$

(vi) Cela découle de la preuve du (i).

On peut exporter la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ en une mesure sur $\mathbb{C}$ que l'on notera A.
Pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on notera $\|f\|_\Omega$ la quantité

$$\left(\int_{\Omega_\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |f(z)|^2 dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ on notera $\langle f, g\rangle_\Omega$ la quantité

$$\int_{\Omega_\mathbb{R}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}\,dx\,dy = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\,dA(z)$$

On note alors $B^2(\Omega)$ l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \,/\, \|f\|_\Omega < +\infty \right\}$$

(le développement consiste en les trois résultats suivants.)

Lemme

Soit L un compact de Ω. Notons r le réel strictement positif $d(L, \mathbb{C}\setminus\Omega)$.
Alors pour tout $f \in B^2(\Omega)$ on a

$$\sup_{a \in L} |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} \|f\|_\Omega$$

Preuve :

Soit $f \in B^2(\Omega)$ et $a \in L$. Soit $\rho \in]0, r[$. Alors on a

$$\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$$

par définition de r.
Par propriété de la moyenne des fonctions holomorphes, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})\,dt$$

donc
$$\rho f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho f(a+\rho e^{it})\,dt$$

En intégrant par rapport à ρ sur $]0,r[$ on obtient

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho f(a+\rho e^{it})\, dt\, d\rho$$
$$\phantom{\frac{r^2}{2} f(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r f(a+\rho e^{it})\, \rho\, d\rho\, dt$$
$$\phantom{\frac{r^2}{2} f(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,r)} f(z)\, dA(z)$$

Puis par inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\frac{r^2}{2} |f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_{B(a,r)} 1\, dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(a,r)} |f(z)|^2 dA(z) \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\phantom{\frac{r^2}{2} |f(a)|} \leqslant \frac{r}{2\sqrt{\pi}} \|f\|_\Omega = \frac{r^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_\Omega$$

ce qui conclut ∎

On en déduit la complétude de $B^2(\Omega)$.

Proposition

L'espace $B^2(\Omega)$ muni de $\langle , \rangle_\Omega$ est un espace de Hilbert.

Preuve:

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $B^2(\Omega)$.

Montrons que (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A ε associons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p, q dans $\mathbb{N}$ on ait

$$p \geqslant N \text{ et } q \geqslant N \implies \int_\Omega |f_p(z) - f_q(z)|^2 dA(z) \leqslant \varepsilon^2$$

Soit L un compact de Ω. On a alors par le lemme précédent

$$\sup_{x \in L} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \varepsilon$$

pour tous p, q dans $\mathbb{N}$ tels que $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$.

Comme $\mathcal{O}(\Omega)$ est complet, on obtient que la suite (f_n)

converge vers une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

En passant à la limite précédemment, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant N \implies \int_\Omega |f_p(z) - f(z)|^2 dA(z) \leqslant \liminf_{q \to +\infty} \int_\Omega |f_q - f_p|^2 dA(z) \leqslant \varepsilon^2$$

par convergence dominée et lemme de Fatou.

On en déduit $f - f_N \in B^2(\Omega)$ et donc $f = f - f_N + f_N \in B^2(\Omega)$.
Puis on obtient aussi

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant N \implies \| f_p - f \|_\Omega \leqslant \varepsilon$$

et donc (f_n) converge vers f dans $B^2(\Omega)$. ■

<u>Rmq</u>: de plus le lemme assure que les applications

$$\delta_a : B^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

pour $a \in \Omega$, sont continues. Ainsi $B^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert de fonctions analytiques.

On précise ses noyaux reproduisants dans le cas $\Omega = \mathbb{D}$.

<u>Proposition</u>

Soit $f \in B^2(\mathbb{D})$. Soit $(a_n) \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Alors on a

$$\| f \|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \pi$$

et le noyau reproduisant de $B^2(\mathbb{D})$ est donné par

$$K_a(z) = \frac{1}{\pi(1 - \bar{a}z)^2}$$

Preuve:

On a

$$\|f\|^2 = \int_{B(0,1)} |f(x+iy)|^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr$$

$$" = \int_0^1 2\pi r \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \, dr = \int_0^1 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n+1} dr$$

$$" = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n+1} dr = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 2\pi \left[\frac{r^{2(n+1)}}{2(n+1)} \right]_0^1$$

$$" = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons e_n l'application $z \longmapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$.

Alors par ce qui précède, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_n\|^2 = 1$$

et de plus un calcul donne

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq m \Rightarrow \langle e_n, e_m \rangle_{\mathbb{D}} = 0$$

Donc (e_n) est un système orthonormal de $B^2(\mathbb{D})$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\langle f, e_n \rangle_{\mathbb{D}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} r^n e^{-in\theta} r d\theta dr$$

$$" = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} r^{m+n+1} a_m e^{i(m-n)\theta} d\theta dr$$

$$" = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 \sum_{m=0}^{+\infty} r^{n+m+1} a_m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \, dr$$

$$" = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 2\pi a_n r^{2n+1} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}} a_n$$

et donc $\quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \quad$ pour tout $f \in B^2(\mathbb{D})$.

On obtient donc que (e_n) est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

Le noyau de reproduction est alors donné par

$$\forall (z,a) \in \mathbb{D}^2 \quad K(z,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(a)} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n\bar{a}^n$$

$$\phantom{\forall (z,a) \in \mathbb{D}^2 \quad K(z,a)} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\bar{a}z)^n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}$$

Cela conclut ■