Formule de Poisson et échantillonnage de Nyquist-Shannon

Réf:
- Analyse de Fourier, C. Gasquet

Leçons: 241, 246, 250

Théorème

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Notons $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f.

ou $\mathbb{R}$ ici

Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2\pi n i t}$$

Preuve:

Etape 1: une fonction 1-périodique et ses coefficients.

Notons ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$$

Elle est bien définie. En effet, comme $f \in S(\mathbb{R})$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad |f(t+n)| \leqslant \frac{2N_2(f)}{1+n^2}$$

où $N_2(f) = \sup\limits_{0\leqslant \alpha,\beta\leqslant 2} \| x^{\alpha} f^{(\beta)} \|_{\infty,\mathbb{R}}$ est une quantité finie.

De plus, il en résulte que Ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi(t+1) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+1+n) = \sum_{n-1\in\mathbb{Z}} f(t+n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = \Psi(t)\end{aligned}$$

car la convergence est absolue. Ainsi Ψ est 1-périodique.

<u>Rmq:</u> on voit la théorie de Fourier pour les fonctions 2π-périodiques.

On peut obtenir les mêmes résultats pour les fonctions 1-périodiques (et T-périodiques), à une renormalisation près, en remarquant que si g est une fonction 1-périodi--que (resp. T-périodique) alors $\tilde{g}(t) := g(\frac{t}{2\pi})$ définit une fonction 2π-périodique (resp. $\tilde{g}(t) := g(T\frac{t}{2\pi})$ définit une fonction 2π-périodique)

On garde cela à l'esprit dans la suite.

Calculons les coefficients de Fourier de Ψ.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}c_n(\Psi) &= \int_0^1 \Psi(t) e^{-2\pi n i t} dt = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k) e^{-2\pi n i t} dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k) e^{-2\pi n i t} dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k) e^{-2\pi n i (t+k)} dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(t) e^{-2\pi n i t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi n i t} dt \\ &= \hat{f}(2\pi n).\end{aligned}$$

Etape 2 : Utilisation du théorème de Féjer.

Comme $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ on en déduit qu'on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\psi)| < +\infty$$

donc la série de Fourier associée à ψ converge absolument donc uniformément.

Or le théorème de Féjer assure qu'on a

$$K_n * \psi \xrightarrow[n \to +\infty]{\|.\|_\infty} \psi$$

Par théorème de Césaro, on obtient que la série de Fourier associée à ψ converge uniformément vers ψ.

D'où l'égalité

$$\forall t \in [0,1] \qquad \psi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\psi)\, e^{2\pi nit}$$

et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)\, e^{2\pi nit}$$

Théorème

Soit $f \in S(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
Soit $\xi_c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\xi_c, \xi_c]$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \leq \frac{1}{2\xi_c}$.
Alors on a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi a n)\, \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{2a\pi} - n\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{2a\pi} - n\right)}$$

dans L^2.

Preuve :

Etape 1 : On utilise la formule de Poisson.

Considérons g l'application définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$$

On a alors $g \in S(\mathbb{R})$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\xi t} \, dt \overset{u=\frac{t}{a}}{=} a \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{-ia\xi t} \, dt$$

$$= a \hat{\hat{f}}(a\xi) = a 2\pi f(-a\xi)$$

d'où, en utilisant la formule de Poisson en at,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(t - \frac{n}{a}\right) = 2\pi a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi a n) e^{-2\pi i n a t}$$

Etape 2 : On isole $\hat{f}(t)$ et on Fourier-transforme.

Comme $a \leqslant \frac{1}{2\xi_c}$, on a $[-\xi_c, \xi_c] \subset \left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]$ et donc pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]$ on a $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad t - \frac{n}{a} \notin [-\xi_c, \xi_c]$.

Ainsi on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(t) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(t - \frac{n}{a}\right)\right) \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]}(t)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi a f(2\pi a n) e^{-2\pi i n a t} \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]}(t)$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Notons f_n l'application

$$t \longmapsto f(2\pi a n)\, e^{-2\pi i n a t}\, \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]}(t)$$

Alors on a $f_n \in L^2$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\|_{L^2} < +\infty$ donc

$$\sum_{n=-N}^{N} f_n \xrightarrow[N \to +\infty]{\|.\|_{L^2}} \hat{f}$$

Comme $f \in S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, on en déduit

$$\sum_{n=-N}^{N} \mathcal{F}^{-1}(f_n) \xrightarrow[N \to +\infty]{L^2} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$$

c-à-d

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi a n) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{2\pi a} - n\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{2\pi a} - n\right)}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$, car

$$\mathcal{F}^{-1}(f_n) = f(2\pi a n) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{2\pi a} - n\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{2\pi a} - n\right)}$$

Rmq :

(1) En voyant f comme un signal, il est possible de reconstituer ce signal fidèlement si la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{a}$ est supérieure à la largeur de la bande spectrale du signal (ici $2\xi_c$).

(2) On peut obtenir la même formule sans les "2π" avec une autre convention pour $\mathcal{F}$.

(3) Pour la formule de Poisson, on peut l'obtenir avec $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, en supposant

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in]1, +\infty[\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$$

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ est normalement convergente sur tout compact.

La formule obtenue l'est alors sur $[0,1]$.