Lemme de Morse

Réf:

- Petit Guide du calcul différentiel, J. Rouvière.

Leçons: 150, 158, 170, 171, 214, 215

Théorème

Soit A_0 une matrice symétrique inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Notons φ l'application

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto {}^tM A_0 M \end{aligned}$$

Alors l'application $d\varphi(I_n)$ est surjective et il existe V un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\chi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V \qquad A = \varphi(\chi(A))$$

Preuve:

Etape 1: $d\varphi(I_n)$ est surjective.

Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(I_n+H) - \varphi(I_n) &= {}^t(I_n+H)A_0(I_n+H) - {}^tI_nA_0I_n \\ &= A_0 + A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H - A_0 \\ &= A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H \end{aligned}$$

d'où $\quad d\varphi(I_n)\cdot H = A_0H + {}^tHA_0 = A_0H + {}^t(A_0H)$

On en déduit l'égalité

$$\mathrm{Ker}(d\varphi(I_n)) = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, -A_0H = {}^t(A_0H) \}$$

On a par ailleurs

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}) \qquad A_0\left(\tfrac{1}{2}A_0^{-1}A\right) + {}^t\left(A_0\left(\tfrac{1}{2}A_0^{-1}A\right)\right) = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}{}^tA$$
$$= A.$$

Donc $d\varphi(I_n)$ est surjective (on peut aussi le voir par un argument de dimension)

Etape 2 : Inversion locale

Considérons l'ensemble

$$\left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \;/\; A_0 M \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$$

noté F. C'est un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ donc un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(d\varphi(I_n))$ car on a

$$\mathrm{Ker}(d\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}$$

et il contient I_n.

Notons ψ la restriction de φ à F. Comme $F \cap \mathrm{Ker}(d\varphi(I_n))$ est réduit à $\{0\}$, l'application $d\psi(I_n)$ est bijective.

Le théorème d'inversion locale assure qu'il existe un ouvert U de I_n dans F inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$ (comme $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, on peut le faire quitte à prendre l'intersection) tel que $\psi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Alors $\varphi(U)$ est un voisinage ouvert de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A \in \varphi(U) \qquad A = \varphi \circ \left(\psi_{|U}\right)^{-1}(A)$$

(on prend $V = \varphi(U)$ et $X = \psi_{|U}^{-1}$)

Rmq : Avec $A_0 = I_n$, on obtient que toute matrice symétrique A suffisamment proche de I_n admet une racine carrée symétrique.

Théorème

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U tel que

$$df(0) = 0$$

et $d^2f(0)$ soit une forme bilinéaire non dégénérée de signature $(p, n-p)$. (0 point critique quadratique non dégénéré)

Alors il existe deux voisinages V et W de 0 et un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in V \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} \varphi(x)_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi(x)_i^2$$

Preuve :

Etape 1 : Utilisation du résultat précédent

Par la formule de Taylor avec reste intégral, il existe V un voisinage de 0 tel que

$$\forall x \in V \quad f(x) - f(0) = \overbrace{df(0)}^{=0} \cdot x + {}^t x \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{Hess}(f)(tx)\,dt\, x$$

Notons $Q(x)$ la matrice $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{Hess}(f)(tx)\,dt$. Alors on a

$$\forall x \in V \quad f(x) - f(0) = {}^t x\, Q(x)\, x$$

Comme $Q(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(f)(0)$ est symétrique et inversible, il existe un voisinage W de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall A \in W \quad \exists M \in GL_n(\mathbb{R}) \quad A = {}^t M\, Q(0)\, M$$

Comme Q est de classe $\mathcal{C}^1$ (car f $\mathcal{C}^2$) et à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, il existe Ω un voisinage de 0 tel que $Q(\Omega) \subset W$.

Alors pour tout x dans $V \cap \Omega$ il existe $M(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que
$$Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$$
où $M(x) = X(Q(x))$. Ainsi $M : V \cap \Omega \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors
$$\forall x \in V \cap \Omega \quad f(x) - f(0) = {}^t(M(x)x)\,Q(0)\,M(x)x$$

Etape 2 : Réduction de forme quadratique

Comme $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$, il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que
$$Q(0) = {}^tA \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$$

Notons φ l'application $x \longmapsto AM(x)x$. On a alors
$$\forall x \in V \cap \Omega \quad f(x) - f(0) = {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi(x)_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi(x)_i^2$$

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V \cap \Omega$ et on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) - AM(0)x &= A(M(x) - M(0))x \\ &= A(dM(0)\cdot x + o(\|x\|))x \\ &= o(\|x\|) \end{aligned}$$

donc $d\varphi(0) = AM(0) \in GL_n(\mathbb{R})$.

Par théorème d'inversion locale, φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféo-morphisme sur un voisinage de 0.

Cela conclut ■