Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler

Leçons : 207, 235, 239, 245, 265

Définition

On appelle fonction gamma d'Euler l'application $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

Théorème

La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) > 0\} =: \Omega$.

Preuve :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Notons $\tilde{\Gamma}(z)$ la quantité

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

Montrons que $\tilde{\Gamma}$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω.

Notons f l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,t) & \longmapsto & e^{-t} t^{z-1} \end{array}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ l'application $z \longmapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω, pour tout $z \in \Omega$ l'application $t \longmapsto f(z,t)$ est intégrable par croissance comparée.

Soit K un compact de Ω. Soient ε, M dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall z \in K \qquad \varepsilon \leq \mathrm{Re}(z) \leq M$$

Alors on a

$$\forall z \in K \ \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |F(z,t)| = |t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\ln(t)}| e^{-t}.$$

$$" \quad \leq e^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)} e^{-t}$$

$$" \quad \leq e^{(\varepsilon-1)\ln(t)} e^{-t} + e^{(M-1)\ln(t)} e^{-t}$$

$$" \quad \leq t^{\varepsilon-1} e^{-t} + t^{M-1} e^{-t}$$

Comme l'application $g : t \longmapsto t^{\varepsilon-1} e^{-t} + t^{M-1} e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par critère de Riemann et croissance comparée, le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale assure que $\tilde{\Gamma}$ est holomorphe sur Ω. Cela conclut ∎

Théorème

La fonction Γ se prolonge en une unique application méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles sont simples et en les $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Preuve:

Etape 1 : formules des compléments.

Montrons qu'on a

$$\forall z \in \Omega \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Par théorème des zéros isolés, il suffit de le montrer pour tout $z \in]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. En intégrant par parties on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\,\Gamma(x)$$

ce qui termine l'étape.

Etape 2 : on télescope !

Par récurrence, on obtient

$$\forall z \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(z+n+1) = (z+n)\dots z\,\Gamma(z)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons Ω_n l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) > -n\} \cap [\![-(n-1), 0]\!]^c$$

et Γ_n l'application méromorphe

$$\begin{array}{rcl} \Omega_n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\dots z} \end{array}$$

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma = \Gamma_{n \restriction \Omega}$.
Donc Γ_n prolonge Γ.

De plus, pour tous n, m dans $\mathbb{N}^*$ tels que $m \geqslant n$, les applications Γ_n et Γ_m coïncident sur $\Omega_n \cap \Omega_m$, et on a

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_- = \Omega \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$$

Ainsi l'application

$$\tilde{\Gamma} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \Gamma_n(z) \quad \text{si } z \in \Omega_n \end{array}$$

est bien définie et est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Etape 3 : aux pôles !

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall z \in \Omega_{n+1} \quad (z+n)\,\tilde{\Gamma}(z) = (z+n)\,\Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\dots z}$$

et donc $$\lim_{z \to -n} (z+n)\,\tilde{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-1)\dots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ est un pôle simple de $\tilde{\Gamma}$ de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$.