Théorème de Banach Alaoglu et optimisation d'une fonctionnelle convexe

Réf :
- Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation P. Ciarlet

Leçons : 203, 213, 219, 229, 253.

Théorème

Soient H un espace de Hilbert séparable et (x_n) une suite bornée d'éléments de H.

Alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge faiblement.

Preuve :

Soit M dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\|_H \leqslant M.$$

Soit (h_n) une suite dense dans H (séparable)

Soit $m \in \mathbb{N}$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\langle x_n, h_m\rangle| \leqslant \|x_n\| \|h_m\| \leqslant M \|h_m\|$$

donc la suite $(\langle x_n, h_m\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Soit φ_m une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\phi(h_m)$ un réel tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi_m(n)}, h_m\rangle = \phi(h_m)$.

En appliquant le procédé d'extraction diagonale, il existe une extractrice φ telle que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, h_m\rangle = \phi(h_m)$$

Etape 2 : montrons que pour tout $y \in H$, la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle)$ converge. Soit $y \in H$.

Comme H est complet, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (h_n) est dense, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|h_m - y\| < \varepsilon$$

et par la convergence de $(\langle x_{\varphi(n)}, h_m\rangle)$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$\left.\begin{matrix} p \geqslant N_0 \\ q \geqslant N_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\langle x_{\varphi(p)}, h_m\rangle - \langle x_{\varphi(q)}, h_m\rangle| < \varepsilon.$$

On en déduit pour tous p, q dans $\mathbb{N}$ tels que $p \geqslant N_0$ et $q \geqslant N_0$

$$\begin{aligned} |\langle x_{\varphi(p)}, y\rangle - \langle x_{\varphi(q)}, y\rangle| &\leqslant |\langle x_{\varphi(p)}, y - h_m\rangle| + |\langle x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}, h_m\rangle| \\ &\quad + |\langle x_{\varphi(q)}, h_m - y\rangle| \\ &\leqslant 2\varepsilon M + \varepsilon \end{aligned}$$

Etape 3 : l'application limite définie par

$$\forall y \in H \quad \phi(y) := \lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle$$

est une forme linéaire continue par Cauchy-Schwarz.

Le théorème de représentation de Riesz assure qu'il existe $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H \quad \phi(y) = \langle x, y\rangle.$$

Cela conclut ■

Théorème

Soient H un espace de Hilbert (séparable) et $J : H \to \mathbb{R}$ une application coercive, convexe et continue.

Alors il existe $u \in H$ tel que $J(u) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Preuve:

Soit (x_n) une suite minimisante de J c-à-d telle que

$$\lim_{n \to +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in H} J(x)$$

Comme J est coercive, la suite (x_n) est bornée dans H.
Par le théorème précédent, il existe alors une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ et $x^* \in H$ tels que $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = x^*$.

Etape : Montrons $J(x^*) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > \inf_{x \in H} J(x)$. Notons C_α l'ensemble

$$\{ x \in H \,/\, J(x) \leq \alpha \}$$

Alors C_α est un convexe fermé non vide de H.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N \leq n \Rightarrow x_{\varphi(n)} \in C_\alpha$$

Par théorème de projection, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow \langle x^* - \pi_{C_\alpha}(x^*), x_{\varphi(n)} - \pi_{C_\alpha}(x^*) \rangle \leq 0$$

d'où $\| x^* - \pi_{C_\alpha}(x^*) \|^2 \leq 0$ et $x^* \in C_\alpha$.

On en déduit $J(x^*) \leq \inf_{x \in H} J(x)$ ce qui conclut ∎

<u>Application :</u>

Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors il existe une unique fonction $u \in H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ telle que

$$-u'' + |u|^{p-1} u = f$$

Si de plus $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et u est solution forte de l'équation

$$-v'' + |v|^{p-1} v = f$$

sur $[0,1]$.

<u>Preuve:</u> on se ramène au théorème précédent, en exhibant la fonctionnelle J qu'il faut.

Soit $u \in H^1_0(0,1)$. On note $J(u)$ la quantité

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u'(t))^2 + \frac{1}{p+1}|u(t)|^{p+1} - f(t)u(t) \right) dt$$

<u>Etape 1:</u> l'application $J : H^1_0(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ est (strictement) convexe et est coercive.

En effet, soit $u \in H^1_0(0,1)$. On a

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(0,1)} - \|f\|_{L^2(0,1)}\|u\|_{L^2(0,1)} \geqslant \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2} - \|u\|_{H^1_0}\|f\|_{L^2}$$

$$\text{"} \quad \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2}+1\right)^{-1}\|u\|^2_{H^1_0} - \|u\|_{H^1_0}\|f\|_{L^2}$$

par inégalité de Poincaré.

<u>Etape 2:</u> l'application J est continue.

D'une part, les applications

$$u \longmapsto u' \quad , \quad u \longmapsto u^2 \quad \text{et} \quad u \longmapsto \int_0^1 f(t)u(t)\,dt$$

sont différentiables sur $H^1_0(0,1)$.

D'autre part, le lemme suivant assure la continuité de l'application $u \longmapsto \int_0^1 |u(t)|^{p+1} dt$.

Lemme

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors l'application

$$F : \begin{array}{ccc} H_0^1(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \int_0^1 \varphi(u(x))\,dx \end{array}$$

est différentiable, de différentielle

$$dF(u)\cdot h = \int_0^1 \varphi'(u(x))h(x)\,dx$$

En effet, on applique ce lemme à $\varphi(t) = \frac{1}{p+1}|t|^{p+1}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\varphi'(t) = t|t|^{p-1}$.

On en déduit alors que l'application J est différentiable sur $H_0^1(0,1)$, de différentielle

$$dJ(u)\cdot h = \int_0^1 \left(u'(t)h'(t) + |u(t)|^{p-1}u(t)h(t) - f(t)h(t)\right)dt$$

D'après la proposition précédente, J admet un minimum $v \in H_0^1(0,1)$. Comme J est strictement convexe, ce minimum est unique.

<u>Etape 3</u> : Soit $u \in H_0^1(0,1)$. Alors u est solution du problème si et seulement si on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1) \quad \langle u', \varphi' \rangle_{L^2} + \langle |u|^{p-1}u, \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$$

si et seulement si (par continuité de $\langle .,. \rangle_{L^2}$ et densité de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$) on a

$$\forall h \in H_0^1(0,1) \quad \langle u', h' \rangle_{L^2} + \langle |u|^{p-1}u, h \rangle_{L^2} = \langle f, h \rangle_{L^2}$$

si et seulement si on a $dJ(u) = 0$.

Comme J est convexe, cela est équivalent à u minimise J.

De plus, on a $-v'' = -|v|^{p-1}v + fv \in L^2(0,1)$. D'où $v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.

car $v \in H_0^1(0,1) \subset \mathcal{C}^0([0,1])$

Enfin si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ alors on a $v'' \in \mathcal{C}^0([0,1])$.
Comme $v' \in H^1(0,1)$, on a $v' \in \mathcal{C}^1([0,1])$ d'après la relation.

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2 \qquad v'(x) - v'(y) = \int_y^x v''(t)\,dt$$

et le fait que v'' soit continue sur $[0,1]$.
De même, comme $v \in H^1(0,1)$, on en déduit $v \in \mathcal{C}^2([0,1])$.
Cela conclut ∎

Démonstration du lemme :

Comme $H_0^1(0,1)$ est inclus dans $L^\infty(0,1)$, l'application F est bien définie, ainsi que l'expression donnée pour sa différentielle.
Soient u, h dans $H_0^1(0,1)$ tel que $\|h\|_{H_0^1} \leq 1$. On a

$$F(u+h) - F(u) - \int_0^1 \varphi'(u(t))\,h(t)\,dt = \int_0^1 (\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)h)\,dt$$

$$'' \quad = \int_0^1 \int_0^1 h(x)\,(\varphi'(u(x) + th(x)) - \varphi'(u(x)))\,dt\,dx$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a pour tous u, h dans $H_0^1(0,1)$ tels que $\|h\|_{H_0^1} \leq 1$ et tout $t \in [0,1]$

$$u + th \in [-1 - \|u\|_{L^\infty}, 1 + \|u\|_{L^\infty}]$$

Comme φ' est continue sur le compact $[-1-\|u\|_{L^\infty}, 1+\|u\|_{L^\infty}]$, par théorème de Heine, elle y est uniformément continue.
Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x,y) \in [-1-\|u\|_{L^\infty}, 1+\|u\|_{L^\infty}]^2 \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |\varphi'(x) - \varphi'(y)| < \varepsilon$$

Alors pour tout $h \in H_0^1(0,1)$ tel que $\|h\|_{H_0^1} < \min(1, \eta)$, on a

$$\left| F(u+h) - F(u) - \int_0^1 \varphi'(u)h\,dt \right| \leq \varepsilon \int_0^1 |h(x)|\,dx$$

$$'' \qquad\qquad \leq \varepsilon \|h\|_{H_0^1}$$

inégalité de Cauchy-Schwarz

Cela conclut ∎