Théorème de Borh - Mollerup

Réf :
- Principes d'analyse mathé-matique, W. Rudi

Leçons : 229, 236, 253, 265.

Théorème

La fonction Γ vérifie

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$

(iii) la fonction $\ln(\Gamma)$ est convexe

Preuve :

Le (i) est une simple intégration par partie et le (ii) s'en déduit
(iii). Soit $p \in]1, +\infty[$. Notons q le réel $\frac{p}{p-1}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Par inégalité de Hölder, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t} \, dt$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x-1}{p}}\right)^p e^{-t} \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{y-1}{q}}\right)^q e^{-t} \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}}$$

et donc $\ln \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \ln \Gamma(x) + \frac{1}{q} \ln \Gamma(y)$ ■

Théorème (Borh - Mollerup)

Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x+1) = f(x)x$

(ii) $f(1) = 1$

(iii) la fonction $\ln f$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $f = \Gamma$.

Preuve:

Notons φ l'application $\ln(f)$. On a alors

(*) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln(x)$

et $\varphi(1) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$. On a alors

$$\varphi(n+1) = \ln(n!)$$

Par convexité de φ on obtient l'inégalité des pentes

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{n+1-n} \leqslant \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} \leqslant \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{n+2-(n+1)}$$

c-à-d $\quad \ln(n) \leqslant \dfrac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} \leqslant \ln(n+1)$

De plus, on a aussi

$$\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k) = \varphi(x) + \ln\Big(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\Big)$$

D'où $\quad 0 \leqslant \varphi(x) - \ln\left(\dfrac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right) \leqslant x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Ainsi on obtient

$$\forall x \in]0,1[\quad \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right)$$

donc φ est uniquement déterminée sur $]0,1[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$ grâce à la relation (*).

Application

Soient x, y dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors on a

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Preuve:

Notons $B(x,y)$ le membre de gauche dans l'égalité précédente.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$B(1,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,dt = \left[-\frac{1}{y}(1-t)\right]_0^1 = \frac{1}{y}$$

Soient x_1, x_2 dans $\mathbb{R}_+^*$ et $p \in]1,+\infty[$. On a alors

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}, y\right) &= \int_0^1 t^{\frac{x_1-1}{p}}\, t^{\frac{x_2-1}{q}} (1-t)^{y-1}\,dt \\
&\leqslant \left(\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant B(x_1,y)^{\frac{1}{p}}\, B(x_2,y)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

De même, comme précédemment, on en déduit que l'application

$$x \longmapsto B(x,y)$$

est log-convexe, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
B(x+1,y) &= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,dt \\
&= \left[-\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \\
&= \frac{x}{x+y} B(x,y)
\end{aligned}$$

et donc $\quad f(x+1) = x f(x) \quad$ avec $\quad f(x) = \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x,y)$

En remarquant qu'alors f vérifie les conditions du théorème précédent on obtient

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \;\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x,y)$$

ce qui conclut ∎

En appliquant le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$ dans l'intégrale précédente, on obtient

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2x-1}\cos(\theta)^{2y-1}\,d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$.

En particulier, pour $x=y=\frac{1}{2}$ on obtient

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Puis le changement de variable $t=s^2$ nous donne

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}\,ds$$

En particulier, pour $x=\frac{1}{2}$ on obtient

$$2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$$

et donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$.

Enfin en appliquant le théorème avec l'application

$$f : x \longmapsto \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\tfrac{x}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{x+1}{2}\right)$$

on obtient

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\tfrac{x}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{x+1}{2}\right)$$

(il faut vérifier les hypothèses (i), (ii), (iii) pour f)