Théorème de Féjer

Propriétés de K_n :

- $K_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin(\frac{nx}{2})^2}{\sin(\frac{x}{2})^2}$
- $\|K_n\|_{L^1_{2\pi}} = 1$
- $K_n = \sum_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n}) e_k$

Proposition :

Pour tout $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{h \to 0} \|f - \tau_h(f)\|_{L^p_{2\pi}} = 0$$

Réf :

- Analyse pour l'agrégation, H. Queffélec.
- Leçons : 209, 246

Théorème (Féjer)

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

et $\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$.

(2) Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|\sigma_n(f)\|_{L^p_{2\pi}} \leqslant \|f\|_{L^p_{2\pi}}$$

et $\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_{L^p_{2\pi}} = 0$.

Preuve :

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\sigma_n(f)(x)| = |f * K_n(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = \|f\|_\infty$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f(x) - \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t)\, dt$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tous u, v dans $\mathbb{R}$

$$|u-v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

On écrit alors (en supposant $\delta \leq \pi$) :

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)| K_n(t)\, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta < |t| \leq \pi} |f(x) - f(x-t)| K_n(t)\, dt$$

$$\text{''} \qquad \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta < |t| \leq \pi} K_n(t)\, dt$$

Comme $K_n(t) = \frac{1}{n}\frac{\sin(\frac{nt}{2})^2}{\sin(\frac{t}{2})^2}$ et pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ tel que $\delta < |t| \leq \pi$ on a $\sin(\frac{\delta}{2})^2 \leq \sin(\frac{t}{2})^2$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta < |t| \leq \pi} K_n(t)\, dt \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})^2}$$

d'où

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin(\frac{\delta}{2})^2}$$

puis $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin(\frac{\delta}{2})^2}$

En passant à la limite supérieure en n, on obtient

$$\limsup \|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

et donc $\limsup \|f - \sigma_n(f)\|_\infty = 0$, c-à-d

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_\infty = 0$$

(2) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\sigma_n(f)(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, dt \right|^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_n(t)\, dt$$

en appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure de proba--bilité de densité $\frac{1}{2\pi} K_n$ sur $[-\pi, \pi]$.

Par théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\begin{aligned}
\| \sigma_n(f) \|^p_{L^p_{2\pi}} &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\, dx\, dt \\
&\underset{\substack{\nearrow \\ f\ 2\pi\text{-périodique}}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx\, dt \\
&\leqslant \| f \|^p_{L^p_{2\pi}}
\end{aligned}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \| \sigma_n(f) \|_{L^p_{2\pi}} \leqslant \| f \|_{L^p_{2\pi}}$

De façon similaire, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\| f - \sigma_n(f) \|^p_{L^p_{2\pi}} &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p\, dx\, dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| f - \tau_t(f) \|^p_{L^p_{2\pi}} K_n(t)\, dt \\
&\leqslant \sigma_n(g)(0)
\end{aligned}$$

où $g : t \longmapsto \| f - \tau_t(f) \|^p_{L^p_{2\pi}}$ est une application continue, 2π-pério--dique sur $\mathbb{R}$.

D'après le (1), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n(g)(0) = g(0) = 0$, d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - \sigma_n(f) \|_{L^p_{2\pi}} = 0$$