Théorème de Fourier - Plancherel

Ref :
- Analyse réelle et complexe, W. Rudin

Leçons : 207, 239, 250.

Théorème

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ $= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$ et on a $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$

Preuve :

Etape 1 : Produit de convolution.

On note $\tilde{f}$ l'application $x \longmapsto \overline{f(-x)}$ et g le produit $f * \tilde{f}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tilde{f}(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{f(y-x)} dy$$

donc $g(0) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \langle \tau_x(f), f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

où $x \longmapsto \tau_x(f)$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$

Ainsi $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue.

Puis par inégalité de Young, on obtient

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

donc $g \in L^1(\mathbb{R})$.

De façon similaire, on a

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

(on a par ailleurs que g est uniformément continue)

Etape 2 : Régularisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons Φ_n l'application $t \longmapsto e^{-\frac{|t|}{n}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{\Phi}_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{n} - ixt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(\frac{1}{n}+ix)}\, dt + \int_{-\infty}^0 e^{t(\frac{1}{n}-ix)}\, dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-t(\frac{1}{n}+ix)}}{\frac{1}{n}+ix} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{t(\frac{1}{n}-ix)}}{\frac{1}{n}-ix} \right]_{-\infty}^0$$

$$= + \frac{1}{\frac{1}{n}+ix} + \frac{1}{\frac{1}{n}-ix} = \frac{2n}{1+n^2x}$$

On a

$$\hat{\Phi}_n * g(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_n(y) g(-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) e^{-iyt}\, dt\, g(-y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) \int_{\mathbb{R}} g(-y) e^{-iyt}\, dy\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{iyt}\, dy\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) \overline{\hat{g}(t)}\, dt$$

où $\hat{g}(t) = \widehat{f * \tilde{f}}(t) = \hat{f}(t)\hat{\tilde{f}}(t) = \hat{f}(t)\overline{\hat{f}(t)} = |\hat{f}(t)|^2$, donc

$$\hat{\Phi}_n * g(0) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) |\hat{f}(t)|^2\, dt$$

Etape 3 : montrons qu'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\Phi}_n * g(0) = 2\pi\, g(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|\hat{\Phi}_n * g(0) - 2\pi g(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_n(y) g(-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_n(y) g(0)\,dy \right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_n(y)\, |g(-y) - g(0)|\,dy$$

car $\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_n(y)\,dy = 2\pi$ $\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n^2} + x^2} \dfrac{1}{\pi n} \right.$ densité de loi de Cauchy $\mathcal{C}(n)$).

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$$

On a alors

$$|\hat{\Phi}_n * g(0) - 2\pi g(0)| \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \hat{\Phi}_n(y)\varepsilon\,dy + 2\|g\|_\infty \int_{|y|>\delta} \hat{\Phi}_n(y)\,dy$$

$$\leqslant \varepsilon + 2\|g\|_\infty \int_{|y|>\delta} \hat{\Phi}_n(y)\,dy$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|y|>\delta} \hat{\Phi}_n(y)\,dy = 0$. par théorème de convergence dominée.

D'où le résultat du titre de l'étape.

Etape 4 : Convergence monotone.

Comme la suite $(\Phi_n |\hat{f}|^2)$ est croissante (et les fonctions sont positives, le théorème de convergence monotone assure l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{\Phi}_n * g(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) |\hat{f}(t)|^2\,dt = \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

et donc $\quad 2\pi \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$.

Corollaire

L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ se prolonge en une application continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve: il suffit de remarquer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{1}_{[-n,n]} f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz, et

$$\lim_{n \to +\infty} \| \mathbb{1}_{[-n,n]} f - f \|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

par convergence dominée.

Puis le théorème précédent permet de conclure. ■

Théorème

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme

Preuve:

Etape 1: $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in S(\mathbb{R})$. En intégrant par parties et en dérivant sous le signe intégrale on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (it)^n \mathcal{F}(f)(t) = \mathcal{F}(f^{(n)})(t)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}((-ix)^n f)(t) = \mathcal{F}(f)^{(n)}(t)$$

D'où pour tous n, p entiers naturels

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | t^n \mathcal{F}(f)^{(p)}(t) | = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} f^{(n-k)}(x) \mathbb{1}_{\{k \leq p\}} dx \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p \wedge n} \binom{n}{k} \frac{p!}{(p-k)!} \int_{\mathbb{R}} |x|^{p-k} |f^{(n-k)}(x)| dx < +\infty$$

Ainsi $\mathcal{F}(S(\mathbb{R})) \subset S(\mathbb{R})$.

Comme $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier fournit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)$$

donc $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Etape 2 : Im($\mathcal{F}$) est dense et fermé.

L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et inclus dans $S(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}(\mathcal{F}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Montrons que $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ est fermé.

Par densité de $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$ il existe (f_n) une suite d'éléments de $L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}(f_n) = g$$

dans $L^2(\mathbb{R})$.

Par égalité de Fourier-Plancherel, (f_n) est alors une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. Par complétude, il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} f$. Par continuité de $\mathcal{F}$, on obtient

$$\mathcal{F}(f) = g$$

Donc $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ est fermé.

Cela conclut ■