Théorème de Lax-Milgram

Réf:
- Analyse fonctionnelle, H Brézis
- L'oral à l'agrégation de mathématiques, L. Isenmann.

Leçons: 219, 221

Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert

Théorème (Lax-Milgram)

Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive c-à-d tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x \in H \ a(x,x) \geq \alpha \|x\|_H^2$

Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

Si de plus a est symétrique alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in H \\ \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min\limits_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right) \end{cases}$$

Preuve (avec Stampacchia)

Comme H est un convexe fermé non vide, le théorème de Stampacchia assure qu'il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H \quad a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$$

Comme $v \longmapsto v-u$ est bijective, on en déduit

$$\forall v \in H \quad a(u,v) \geq \varphi(v)$$

et de même, comme $-v \in H$ on obtient

$$\forall v \in H \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

Le cas symétrique découle de celui du théorème de Stampacchia. Cela conclut ■

Preuve: (sans Stampacchia)

Par théorème de Riesz, pour tout $x \in H$ il existe un unique $T(x) \in H$ tel que

$$\forall y \in H \quad a(x,y) = \langle T(x), y \rangle_H$$

Comme a est continue, on obtient

$$\forall x \in H \quad \|T(x)\|_H^2 = \langle T(x), T(x) \rangle_H = a(x, T(x))$$
$$\leqslant \|a\|_{H^2} \|T(x)\|_H \|x\|_H$$

et donc $T : H \longrightarrow H$ est continue car linéaire par unicité.

NB: Soient x, y dans H^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall v \in H \quad a(\lambda x + y, v) = \lambda a(x,v) + a(y,v)$$
$$= \lambda \langle T(x), v \rangle_H + \langle T(y), v \rangle_H$$
$$= \langle \lambda T(x) + T(y), v \rangle_H$$

D'où $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$ par unicité dans le théorème de Riesz. Ainsi T est linéaire.

Montrons que T est bijective. Alors, comme il existe $w \in H$ tel que $\varphi = \langle w, . \rangle_H$ (théorème de Riesz), on obtiendra l'existence. L'unicité découlera de l'injectivité de T.

Etape 1: T est injectif.

Soit $x \in Ker(T)$. Alors on a

$$0 = \langle T(x), x \rangle_H = a(x,x) \geqslant \alpha \|x\|_H^2$$

et donc $x = 0$ ce qui montre que T est injectif.

Etape 2: T est surjectif.

Montrons que $T(H)$ est fermé et dense dans H.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz et avec les calculs précédents on obtient

$$\forall x \in H \quad \|T(x)\|_H \geqslant \alpha \|x\|_H$$

Soient $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ et $y \in H$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} T(x_n) = y$

Alors $(T(x_n))$ est de Cauchy, donc (x_n) l'est aussi par ce qui précède.

Comme H est complet, il existe $x \in H$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Par continuité de T, on obtient $T(x) = y$.

D'où $T(H)$ est fermé.

Montrons que $T(H)^{\perp}$ est réduit à $\{0\}$.

Soit $y \in T(H)^{\perp}$. Alors on a comme précédemment

$$0 = \langle y, T(y) \rangle_H = a(y,y) \geq \alpha \|y\|_H^2$$

et donc $y = 0$.

Par théorème du supplémentaire orthogonal on obtient

$$\overline{T(H)} = H$$

Ainsi T est bijective.

<u>Etape 3</u> : Supposons que a est symétrique.

Notons Ψ l'application

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \end{aligned}$$

Alors on a $\forall v \in H \quad \Psi(u+v) = \Psi(u) + \frac{1}{2} a(v,v)$

donc $\Psi(u+v) \geq \Psi(u)$ avec égalité si et seulement si

$$a(v,v) = 0$$

c-à-d ssi $v = 0$ par coercivité de a.

Cela conclut ∎

<u>Application:</u>

Soient $f \in L^2(0,1)$, p et q dans $L^\infty(0,1)$. On suppose que q est positive et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p \geq \alpha$

Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution u dans $H_0^1(0,1)$ au sens où

$$\forall v \in D(0,1) \quad \int_0^1 pu'v'\,dx + \int_0^1 quv\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

De plus, si $p \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et q, f sont dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et la solution est au sens classique.

<u>Preuve:</u>

<u>Etape 1</u>: Utilisation de Lax-Milgram.

Considérons a l'application bilinéaire continue symétrique

$$\begin{aligned} H_0^1(0,1)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \int_0^1 pu'v'\,dx + \int_0^1 quv\,dx \end{aligned}$$

et la forme linéaire continue

$$\varphi : \begin{aligned} H_0^1(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_0^1 fu\,dx \end{aligned}$$

Elles vérifient les conditions du théorème de Lax-Milgram (<u>NB</u>: utiliser l'inégalité de Poincaré : $\forall u \in H_0^1(0,1)\ \|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi}\|u'\|_{L^2}$)

Ainsi comme $H_0^1(0,1)$ est un espace de Hilbert, il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(0,1) \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

et comme a est symétrique, u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in H_0^1(0,1) \\ J(u) = \min\limits_{v \in H_0^1(0,1)} J(v) \end{cases}$$

où $J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v)$.

En particulier, comme $\mathcal{D}(0,1)$ est dense dans $H_0^1(0,1)$ et a, φ sont continues sur $H_0^1(0,1)$ la condition

$$\forall v \in H_0^1(0,1) \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

est équivalente à

$$\forall v \in \mathcal{D}(0,1) \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

c-à-d à

$$\forall v \in \mathcal{D}(0,1) \quad \langle -(pu')' + qu - f, v \rangle = 0$$

et donc $-(pu')' + qu = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

<u>Etape 2</u> :

Alors par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$pu' \in L^2(0,1) \qquad qu \in L^2(0,1)$$

car $\left| \begin{matrix} u' \\ u \end{matrix} \right. \in L^2(0,1)$ et $q, p \in L^\infty(0,1)$. Puis de plus on a

$$(pu')' = qu - f \in L^2(0,1)$$

d'où $pu' \in H^1(0,1)$

<u>Etape 3</u> : Supposons f continue sur $[0,1]$, q aussi et p de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$

Alors $(pu')'$ est une fonction continue sur $[0,1]$

Comme $\left| \begin{matrix} pu' \\ u \end{matrix} \right. \in H^1(0,1)$, on peut les supposer continues sur $[0,1]$.

On a alors $(pu')' = qu - f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et par propriété de $H^1(0,1)$

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad (pu')(x) - (pu')(y) = \int_y^x (pu')'(t)\,dt$$

et donc pu' est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée $(pu')'$.
Ainsi $pu' \in \mathcal{C}^2([0,1])$.
Comme $p \geq \alpha > 0$ et $p \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on en déduit

$$u \in \mathcal{C}^2([0,1]).$$

Cela conduit

Application :
Soient $f \in L^2(0,1)$, $\alpha \in L^\infty(0,1)$ tel que il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha \geq c$, et $\beta \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tel que $\beta' \leq 2$.
Alors il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que

$$-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$$

dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

Preuve : considérons l'application

$$a: \begin{array}{ccc} H_0^1(0,1)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle \alpha u', v' \rangle_{L^2} + \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle \beta u', v \rangle_{L^2} \end{array}$$

Alors a est bilinéaire (non symétrique) continue.
* Montrons que a est coercive :
Soit $u \in \mathcal{D}(0,1)$. On a

$$\langle \beta u', u \rangle_{L^2} = \int_0^1 \beta(t) u'(t) u(t)\,dt \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{1}{2}\int_0^1 \beta'(t)\, u(t)^2\,dt$$
$$\geq -\max_{t \in]0,1[} \beta'(t)\, \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

et par densité de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$ on obtient l'inégalité pour $u \in H_0^1(0,1)$.
Puis pour $u \in H_0^1(0,1)$ on a alors

$$a(u,u) \geq c\,\|u'\|_{L^2}^2 + \left(1 - \frac{\beta'_{max}}{2}\right)\|u\|_{L^2}^2$$

puis par inégalité de Poincaré, et comme $1 - \frac{\beta'_{max}}{2} \geqslant 0$ on obtient

$$a(u,u) \geqslant c\|u'\|^2_{L^2} \geqslant \frac{c}{2}\|u'\|^2_{L^2} + \frac{c}{2}\pi^2\|u\|^2_{L^2}$$
$$\geqslant \frac{c}{2}\|u\|^2_{H^1_0}$$

ce qui montre la coercivité.

Par ailleurs la forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} H^1_0(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \int_0^1 f(t)v(t)\,dt \end{array}$$

est continue.

<u>Par théorème de Lax-Milgram</u> on obtient qu'il existe un unique $u \in H^1_0(0,1)$ tel que

$$\forall v \in H^1_0(0,1) \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

c-à-d par continuité de a et φ, et densité de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H^1_0(0,1)$

$$\forall v \in \mathcal{D}(0,1) \quad a(u,v) = \varphi(v)$$

soit u est solution de

$$-(\alpha u')' + \beta u' + u = f.$$

Cela conclut ∎