Théorème de Montel

Réf :
- Analyse complexe, M. Queffélec.

Leçons : 201, 203, 205, 245.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite exhaustive de compacts d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ non vide, c-à-d des compacts vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$$

et

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$$

Par exemple, on peut considérer $K_n = \left\{ z\in\Omega \,/\, |z|\leqslant n,\ d(z,\Omega^c)\geqslant \frac{1}{n} \right\}$

Notons pour tout $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$p_n(f) := \sup_{z\in K_n} |f(z)|$$

et pour $g\in\mathcal{O}(\Omega)$

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

Alors d est une distance invariante par translation sur $\mathcal{O}(\Omega)$.
De plus, pour toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{O}(\Omega)$ et $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ on a équivalence entre $f_n \xrightarrow{uc} f$ et $d(f_n,f)\longrightarrow 0$

Preuve :

* Soient f, g dans $\mathcal{O}(\Omega)$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$2^{-N} \frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \leqslant 2^{-N} + p_N(f-g)$$

car les (p_n) sont croissantes. En effet, on peut écrire alors

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

$$\text{''} \quad \leqslant p_N(f-g) \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n-N}\right) 2^{-N}$$

$$\text{''} \quad \leqslant p_N(f-g) + 2^{-N}$$

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

* Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω.

Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(f_n, f) \leqslant p_N(f_n, f) + 2^{-N}$$

et donc $\quad \limsup d(f_n, f) \leqslant 2^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$.

* Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$. Alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_N(f_n, f)}{1+p_N(f_n, f)} \leqslant 2^N \lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. On en déduit comme $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ est un homéomorphisme

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{n \to +\infty} p_N(f_n, f) = 0$$

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < \varepsilon < 1$.
Alors il existe $f_1, \dots, f_q$ dans A tels que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{q} B(f_j, \varepsilon 2^{-N-1})$$

Soit $f \in A$ Soit $j \in [\![1, q]\!]$ tel que $d(f, f_j) < \varepsilon 2^{-N-1}$.
En particulier, on a

$$2^{-N} \frac{p_N(f-f_j)}{1+p_N(f-f_j)} \leqslant \varepsilon 2^{-N-1}$$

et donc
$$\frac{p_N(f-f_j)}{1+p_N(f-f_j)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

puis comme $\varepsilon < 1$, on a $\quad p_N(f-f_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \leqslant \varepsilon$

D'où
$$p_N(f) - p_N(f_j) \leqslant p_N(f-f_j) \leqslant \varepsilon$$

et ainsi
$$p_N(f) \leqslant \varepsilon + \sup_{1 \leqslant j \leqslant q} p_N(f_j) < +\infty .$$

Donc A est une famille normale.

Réciproquement, supposons que A est une famille normale.

<u>Lemme</u>

Soit K un compact de Ω. Alors l'ensemble

$$A_{|K} := \left\{ f_{|K} \; ; \; f \in A \right\}$$

est équicontinu.

<u>Preuve:</u>

Montrons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (z_1, z_2) \in K^2 \ \forall f \in A \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \lambda |z_1 - z_2|$$

et donc on a la convergence de (f_n) vers f uniforme sur tout compact de Ω. ■

De plus, la topologie induite par d est complète sur $\mathcal{O}(\Omega)$.

Preuve:

Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de $(\mathcal{O}(\Omega), d)$.
Soient n, m dans $\mathbb{N}$. On a

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{p_N(f_n - f_m)}{1 + p_N(f_n - f_m)} \leq d(f_n, f_m) 2^N$$

De même, on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la suite (f_n) est de Cauchy pour la convergence uniforme sur tout compact de Ω.
En particulier, elle converge alors vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ par théorème de Weierstrass, pour laquelle on a

$$\lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$$

Définition (famille normale)

Soit A une partie de $\mathcal{O}(\Omega)$.
On dit que A est une famille normale si pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sup_{f \in A} p_N(f) < +\infty$$

Théorème (Montel)

Soit A une partie de $\mathcal{O}(\Omega)$.
Alors A est une famille normale si et seulement si A est relativement compacte dans $(\mathcal{O}(\Omega), d)$.

Preuve: Supposons que A soit relativement compacte dans $(\mathcal{O}(\Omega), d)$. Alors A est précompact.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'on ait

$$K_{2r} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, d(z,K) \leq 2r \} \subset \Omega$$

Comme A est une famille normale et comme K_{2r} est un compact de Ω, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\sup_{f \in A} \sup_{z \in K_{2r}} |f(z)| \leq M.$$

Comme on a $\forall z \in K_r \quad \overline{B(z,r)} \subset K_{2r}$, les estimés de Cauchy assure qu'on a

$$\forall f \in A \quad \forall z \in K_r \quad |f'(z)| \leq \frac{\sup_{\overline{B(z,r)}} |f|}{r} \leq \frac{M}{r}$$

Soient z_1, z_2 dans K et $f \in A$.
Si $|z_1 - z_2| > r$ alors on a

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{r} |z_1 - z_2|$$

Si $|z_1 - z_2| \leq r$ alors le segment $[z_1, z_2]$ est inclus dans K_r et par inégalité de la moyenne on obtient

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \sup_{z \in [z_1, z_2]} |f'(z)| \, |z_1 - z_2|$$

$$\leq \frac{M}{r} |z_1 - z_2|$$

Fin de la preuve du lemme.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-N} \leq \varepsilon$. Alors $A_{|K_N}$ est équicontinu et borné donc par théorème d'Ascoli, il est relativement compact donc précompact dans $(\mathcal{C}^0(K_N, \mathbb{C}), p_N)$
Il existe ainsi $f_1, \dots, f_q$ dans A tel que

$$A_{|K_N} \subset \bigcup_{j=1}^{q} B_{\mathcal{C}^0(K_N)}(f_j, \varepsilon)$$

Soit $f \in A$. Soit $j \in [\![1, q]\!]$ tel que

$$p_N(f_j - f) < \varepsilon$$

Alors on a

$$d(f, f_j) \leq p_N(f - f_j) + 2^{-N} < \varepsilon$$

D'où

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{q} B(f_j, \varepsilon)$$

Donc A est précompact dans $(\mathcal{O}(\Omega), d)$ qui est complet, c-à-d A est relativement compact. Cela conclut ∎