Théorème de Riesz - Fréchet - Kolmogorov

Réf:
- Analyse fonctionnelle, H. Brezis

Leçons: 201, 203, 209, 234

Proposition
Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $\tau_\cdot(f)$ est uniformément continue.

Proposition
Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que
- $0 \leqslant \theta \leqslant 1$
- $\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\,dx = 1$
- $\mathrm{Supp}(\theta) \subset B(0,1)$

Notons $\theta_n(x) := n^d \theta(nx)$.
Alors pour tout $p \in [1,+\infty[$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\theta_n * f \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_{L^p}} f$$

Théorème (Ascoli).
Soient (X,d) un espace métrique compact et (Y,d') un espace métrique complet.
Soit $A \subset \mathcal{C}^0(X,Y)$. Alors A est relativement compacte ssi
- A est équicontinue
- Pour tout $x \in X$ $\{f(x)\,;\, f \in A\}$ est relativement compacte.

Rmq: pour $Y = \mathbb{R}$, on peut remplacer rel. compact par borné dans la deuxième hypothèse.

Théorème (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)
Soient $p \in [1,+\infty[$ et $\mathcal{F}$ une partie fermée de $L^p(\mathbb{R}^d)$.
Alors $\mathcal{F}$ est compact si et seulement si on a

(I) $\mathcal{F}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(II) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists R \in \mathbb{R}_+^* \; \forall f \in \mathcal{F} \quad \int_{\|x\|>R} |f(x)|^p\,dx < \varepsilon$.

(III) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \; \forall h \in B(0,\delta) \; \forall f \in \mathcal{F} \quad \|\tau_h f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$

Preuve:
$(\Rightarrow)$: Supposons que $\mathcal{F}$ soit compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}$ est borné. Montrons à présent qu'on a (II) et (III). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $\mathcal{F}$ est compact, il existe $f_1, \dots, f_N$ dans $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B\left(f_i, \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}\right)$$

Par intégrabilité de $|f_1|^p, \dots, |f_N|^p$, il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall j \in [\![1,N]\!] \quad \int_{\|x\|>R} |f_j(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{2^p}$$

Soit alors $f \in \mathcal{F}$ et $i \in [\![1,N]\!]$ tel que $f \in B(f_i, \frac{\varepsilon}{2})$. On obtient

$$\left(\int_{\|x\|>R} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\|x\|>R} |f(x)-f_i(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\|x\|>R} |f_i(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

et on en déduit (II).

Comme on a $\lim_{h\to 0} \|\tau_h(f)-f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall j \in [\![1,N]\!] \quad \forall h \in \mathbb{R}^d \quad \|h\| < \alpha_j \Rightarrow \|\tau_h f_j - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

Notons α le réel $\min_{1\leq j\leq N} \alpha_j$. Alors pour tout $h \in B(0,\alpha)$ on obtient

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\tau_h f - \tau_h f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_i - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\tau_h f_i - f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq 2\|f - f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

et donc (III).

($\Leftarrow$) : A présent, supposons que les propriétés (I), (II) et (III) soient vérifiées.

Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)dx = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp}(\theta) \subset B(0,1)$$

On note (θ_n) la suite régularisante définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \theta_n(x) := n^d \theta(nx)$$

et de plus on note f_n le produit $\theta_n * f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$.

<u>Etape 1</u> : On applique le théorème d'Ascoli à l'ensemble, noté A_n, $\{f_n \,;\, f \in \mathcal{F}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et restreint à une boule.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(\bullet) \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\theta_n\|_\infty^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} n^{\frac{d}{p}}$$

$$(\bullet) \quad \forall f \in \mathcal{F} \ \forall i \in [\![1,d]\!] \quad \|\partial_i f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\partial_i \theta_n\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p} \lambda_d(B(0,1))^{\frac{p-1}{p}}$$

Comme $\mathcal{F}$ est borné, on en déduit que A_n l'est aussi.
On obtient de plus, par inégalité des accroissements finis, que A_n est équicontinue.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe (par (ii)) $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \int_{\|x\|>R} |f(x)|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{2} \longleftarrow \text{bien choisi pour la suite}$$

Notons, pour tout $f \in \mathcal{F}$, f_n^R la restriction de f_n à $\overline{B(0,R)}$.

Par théorème d'Ascoli, A_n^R est relativement compact dans $\mathcal{C}^0(\overline{B(0,R)})$.

<u>Etape 2</u> : On montre que $\mathcal{F}$ est précompact. (dans $L^p(\mathbb{R}^d)$).

Comme A_n^R est relativement compact, il existe $f_1, \dots, f_N$ dans $\mathcal{F}$ tels que

$$A_n^R \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{\mathcal{C}^0(\overline{B(0,R)})}\left(f_{j,n}^R, \frac{\varepsilon}{\lambda_d(\overline{B(0,R)})^{\frac{1}{p}}}\right)$$

$$\text{''} \quad \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{L^p(\overline{B(0,R)})}(f_{j,n}^R, \varepsilon)$$

et donc on obtient que A_n^R est précompact dans $L^p(\overline{B(0,R)})$.

Montrons qu'on a $\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{L^p(\mathbb{R}^d)}(f_j, 5\varepsilon)$.

Soit $f \in \mathcal{F}$. Il existe $i \in [\![1,N]\!]$ tel que $\|f_n^R - f_{i,n}^R\|_{L^p(\overline{B(0,R)})} < \varepsilon$.

Point sur la suite $\Theta_n * f$:

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a

$$|\Theta_n * f(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)(f(x-y) - f(y))\,dy \right|$$

$$\text{"} \qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\,|f(x-y) - f(y)|\,dy$$

Et donc

$$\| \Theta_n * f - f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\,|f(x-y) - f(y)|\,dy \right)^p dx$$

$$\text{"} \qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\,|f(x-y) - f(y)|^p\,dy\,dx$$

Hölder avec proba $\Theta_n(y)\,dy$

$$\text{"} \qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\,\| \tau_y(f) - f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,dy$$

Fubini-Tonelli

$$\text{"} \qquad \leqslant \int_{B(0,\frac{1}{n})} \Theta_n(y)\,\| \tau_y(f) - f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,dy$$

A $\frac{\varepsilon^p}{2}$ associons $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ donné par (III). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{\delta}$ on a

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \| f_n - f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{\delta}$. On a alors

$$\| f - f_i \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \| f - \tilde{f}_n^R \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \| \tilde{f}_n^R - \tilde{f}_{i,n}^R \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \| \tilde{f}_{i,n}^R - f_i \|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\text{"} \qquad \leqslant \left(\int_{\|x\|>R} |f(x)|^p dx + \| f - f_n \|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon$$

$$+ \left(\int_{\|x\|>R} |f_i(x)|^p dx + \| f_{i,n} - f_i \|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{"} \qquad \overset{n > \frac{1}{\delta}}{\leqslant} \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = 3\varepsilon$$

D'où $\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(f_j, 3\varepsilon)$. Ainsi $\mathcal{F}$ est précompact.

Comme $\mathcal{F}$ est fermé dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ complet, on obtient que $\mathcal{F}$ est compact.

On a utilisé le résultat suivant:

Proposition

Soit (E,d) un espace métrique.
Soit A une partie de E.
Alors A est compact si et seulement si A est précompact et complet.

Preuve:

Supposons que A soit précompact et complet.
Pour cela, on considère une suite (x_n) d'éléments de A et on montre qu'elle admet une sous-suite de Cauchy.

A cet effet, on construit une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-parties de A tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \operatorname{diam}(A_k) = 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) telle que

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall m\in\mathbb{N} \qquad m\geqslant n \Rightarrow x_{\varphi(m)}\in A_n$$

Alors on montre que $(x_{\varphi(n)})$ est une suite de Cauchy.

Etape 1: Initialisation

Comme A est précompact, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_N$ dans A tel que

$$A\subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j,1)$$

Comme $\mathbb{N}$ est infini, il existe $j\in [\![1,N]\!]$ tel que l'ensemble

$$\{n\in\mathbb{N} \,/\, x_n\in B(a_j,1)\}$$

noté N_0, soit infini. Notons de plus A_0 l'ensemble $B(a_j,1)$.
On a $\operatorname{diam} A_0 = 2^0$

Etape 2: Hérédité

Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons construits $A_0,\dots,A_k$ des sous-parties de A telles que

$$\forall j \in [\![0,k]\!] \quad \operatorname{diam} A_j = 2^{-j}$$

et telles que les sous-parties de $\mathbb{N}$ $N_0, \dots, N_k$ définies par

$$\begin{cases} N_0 := \{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in A_0\} \\ \forall j \in [\![0,k-1]\!] \quad N_{j+1} := \{n \in N_j \,/\, x_n \in A_j\} \end{cases}$$

soient infinies.

Comme A est précompact, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_N$ dans A tels que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j, 2^{-k-1})$$

Comme N_k est infini, il existe $j \in [\![1,N]\!]$ tel que l'ensemble

$$\{n \in N_k \,/\, x_n \in B(a_j, 2^{-k-1})\}$$

soit infini.

Par théorème de récurrence, on obtient qu'il existe (A_n) une suite de sous-parties de A tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(A_n) = 2^{-n}$. et tel que les sous-parties de $\mathbb{N}$ (N_n) définies par

$$\begin{cases} N_0 := \{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in A_0\} \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad N_{k+1} := \{n \in N_k \,/\, x_n \in A_{k+1}\} \end{cases}$$

soient infinies.

<u>Etape 3</u> : Construction de $(x_{\varphi(n)})$

On définit une application $\varphi : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante par

$$\begin{cases} \varphi(0) := \min(N_0) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+1) := \min\{k \in N_{n+1} \,/\, k > \varphi(n)\} \end{cases}$$

Alors on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \Rightarrow x_{\varphi(m)} \in A_n$$

Etape 4 : la suite $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy

Soient n, m dans $\mathbb{N}$. Alors on a

$$x_{\varphi(n+m)} \in A_n \quad \text{et} \quad x_{\varphi(n)} \in A_n$$

et donc

$$d(x_{\varphi(n+m)}, x_{\varphi(n)}) \leqslant \operatorname{diam}(A_n) = 2^{-n}$$

Donc la suite est bien de Cauchy.

Comme A est complet, elle converge.

On en conclut que A est séquentiellement compact. ∎

Applications:

Proposition :

Soit $\mathcal{F}$ une sous-partie bornée de $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Supposons qu'on ait

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\|x\|>R} |f(x)|^2 dx = \lim_{R \to +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\|x\|>R} |\hat{f}(x)|^2 dx = 0$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact.

Preuve : on va utiliser le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogo-
-rov.
Il est clair que $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie les conditions (I) et (II) énoncées dans le théorème.
En effet, comme $\mathcal{F}$ est borné, $\overline{\mathcal{F}}$ l'est aussi. De plus, soit $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall g \in \mathcal{F} \quad \int_{\|x\|>R} |g(x)|^2 dx < \varepsilon$$

En passant à la limite on obtient $\int_{\|x\|>R} |f(x)|^2 dx < \varepsilon$

Montrons donc que $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie aussi (III) et cela conclura.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f \in \overline{\mathcal{F}}$. On a par égalité de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)-f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f(x+h)} - \hat{f}(x)|^2 dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x)|^2 |e^{-i\langle x,h\rangle} - 1|^2 dx$$

car $\mathcal{F}(\tau_{-h}(f))(x) = \mathcal{F}(f)(x)\, e^{-i\langle x,h\rangle}$ (où $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}^d)$ désigne la transformation de Fourier.)

Puis on a les lemmes suivants :

<u>Lemme 1</u> :

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dans $\mathbb{C}$ de modules inférieurs à 1.
Alors on a
$$\left| \prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^n |b_j - a_j|$$

<u>Preuve</u> : on procède par récurrence sur n.

<u>Lemme 2</u> :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a $|e^{ix} - 1| \leqslant |x|$

<u>Preuve</u> : Si $x=0$ alors c'est clair. Supposons $x \neq 0$. Alors on a d'une part $\frac{1}{ix}(e^{ix}-1) = \int_0^1 e^{itx} dt$ et d'autre part

$$\left| \int_0^1 e^{itx} dt \right| \leqslant 1.$$

D'où $|e^{ix} - 1| \leqslant |x|$. ∎

Avec les lemmes on obtient

$$|e^{-i\langle x,h\rangle} - 1|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^d |e^{-ix_jh_j} - 1| \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^d |x_jh_j| \right)^2$$
$$\leqslant \|x\|_2^2 \, \|h\|_2^2$$

où la dernière inégalité découle de Cauchy-Schwarz.

Il s'en suit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)-f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0,R)} |\hat{f}(x)|^2 \|x\|_2^2 \|h\|_2^2 \, dx + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\|x\|>R} 2|\hat{f}(x)|^2 dx$$

car on a aussi $|e^{-i\langle x,h\rangle} - 1| \leq 2$ par inégalité triangulaire.

Puis soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall g \in \mathcal{F} \quad \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M$.

On a alors, pour h dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\|h\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{M^2 R^2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)-f(x)|^2 dx \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

où $R \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie $\sup_{g \in \mathcal{F}} \int_{\|x\|>R} |\hat{g}(x)|^2 dx \leq \frac{(2\pi)^d}{2} \varepsilon$.

Cela conclut ∎

Un cas intéressant de critère de compacité est dans le cas $L^p(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné (ou non) de $\mathbb{R}^d$.

Quelques définitions avant :

Définition (Fortement inclus)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit ω un ouvert inclus dans Ω.

On dit que ω est fortement inclus dans Ω si on a

$$\overline{\omega} \subset \Omega$$

et $\overline{\omega}$ est compact. On note alors $\omega \subset\subset \Omega$.

Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $\omega \subset\subset \Omega$.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$.

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement dans $L^p(\omega)$ si et seulement si on a

(*) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \delta \in]0, d(\omega, \complement\Omega)[\quad \forall h \in B(0,\delta) \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \|\tau_h(f) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$

Preuve : le sens (⇒) se montre comme dans le théorème précédent.
Réciproquement, supposons la propriété (*) vérifiée. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

Rmq :

- la quantité $d(\omega, \complement\Omega)$ est bien définie et strictement positive car $\overline{\omega}$ est compact, $\complement\Omega$ est fermé et $(\complement\Omega) \cap \overline{\omega} = \emptyset$
  En effet, on a alors

$$0 < d(\overline{\omega}, \complement\Omega) \leqslant d(\omega, \complement\Omega)$$

- pour $f \in \mathcal{F}$, on notera $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 sur $\mathbb{R}^d$, c-à-d l'application $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etape 1 : approximation par fonctions régulières.

Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

- $\operatorname{Supp}(\rho) \subset B(0,1)$
- $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\,dy = 1$
- $0 \leqslant \rho \leqslant 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad \rho_n(x) := n^d \rho(nx)$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{Supp}(\rho_n) \subset B(0, \tfrac{1}{n}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\,dy = 1$$

On obtient comme précédemment

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F} \quad \| \rho_n * \tilde{f} - \tilde{f} \|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

En remarquant qu'on a $\omega + B(0,\delta) \subset \Omega$

Etape 2 : Utilisation du théorème d'Ascoli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{\delta}$. Notons $\mathcal{H}$ la famille

$$(\rho_n * \tilde{\mathcal{F}})_{|\overline{\omega}} = \{(\rho_n * \tilde{f})_{|\overline{\omega}} \; ; \; f \in \mathcal{F}\}$$

Alors $\mathcal{H}$ est bornée et équicontinue.

On a de même

$$\forall f \in \mathcal{F} \qquad \|\rho_n * \tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\rho_n\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|\rho_n\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

et pour tout $f \in \mathcal{F}$, tous x, y dans $\mathbb{R}^d$ on a

$$|\rho_n * \tilde{f}(x) - \rho_n * \tilde{f}(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_n(z-x) - \rho_n(z-y)| \, |\tilde{f}(z)| \, dz$$

$$\text{''} \qquad \leqslant \|\rho_n\|_{Lip} \|x-y\| \, \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

en supposant Ω borné, ce qu'on peut faire car ω est relativement compact.

Il s'en suit, par théorème d'Ascoli, que $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}^0(\overline{\omega})$ et donc dans $L^p(\omega)$ (comme précédemment)

Etape 3 : on recolle.

Comme $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$, il est précompact. Soient $f_1, \dots, f_N$ dans $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{L^p(\omega)}(\rho_n * \tilde{f}_j, \varepsilon)$$

Soit $f \in \mathcal{F}$. Soit $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $\|\rho_n * \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f}_j\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$.

Alors on a

$$\|f - f_j\|_{L^p(\omega)} = \|f - \rho_n * \tilde{f} + \rho_n * \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f}_j + \rho_n * \tilde{f}_j - f_j\|_{L^p(\omega)}$$

$$\text{''} \qquad \leqslant \|f - \rho_n * \tilde{f}\|_{L^p(\omega)} + \|\rho_n * \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f}_j\|_{L^p(\omega)} + \|\rho_n * \tilde{f}_j - f_j\|_{L^p(\omega)}$$

$$\text{''} \qquad \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

et donc $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$ ∎

Rmq : on a essentiellement refait la preuve du premier théorème.

On en déduit l'analogue du premier théorème avec $\Omega = \mathbb{R}^d$:

Corollaire

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si on a

$$\text{(I)} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \omega \subset\subset \Omega \quad \exists \delta \in]0, d(\omega, \partial\Omega)[\quad \forall h \in B(0,\delta) \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \|\tau_h(f) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

$$\text{(II)} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \omega \subset\subset \Omega \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon$$

Preuve : c'est une version remaniée du premier théorème énoncé.

De même, le sens $(\Rightarrow)$ se traite de la même façon que la première fois.

Supposons que $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés (I) et (II).

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit ω un ouvert fortement inclus dans Ω tel que

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon$$

D'après le théorème précédent, on sait que $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. Soient alors $f_1, \dots, f_N$ dans $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{F}_{|\omega} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{L^p(\omega)}(f_j, \varepsilon)$$

Soit $f \in \mathcal{F}$. Soit $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $\|f - f_j\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$. Alors on a

$$\|f - \widetilde{f_j}_{|\omega}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f - f_j\|_{L^p(\omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leqslant 2\varepsilon$$

où $\widetilde{g}_{|\omega}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$.

Cela conclut ■