Théorème de l'application conforme de Riemann

Réf:
- Analyse complexe et applications, M. Queffélec
- Analyse complexe, E. Amar

Leçons: 204, 219, 245.

Théorème (Riemann)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
Alors il existe une application holomorphe bijective $f : \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ si et seulement si Ω est simplement connexe et $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Preuve:

($\Rightarrow$): Supposons qu'il existe un biholomorphisme f de Ω sur $\mathbb{D}$.
Comme le disque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, on obtient par continuité de f^{-1} que $\Omega = f^{-1}(\mathbb{D})$ est connexe.
Soit γ un lacet dans Ω. Alors $f \circ \gamma$ est un lacet dans $\mathbb{D}$.
Comme $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il existe $a \in \mathbb{D}$ et une application $H : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{D}$ telle que

$$\forall t \in [0,1] \qquad H(t,0) = f(\gamma(t)), \quad H(t,1) = a$$

Alors $f^{-1} \circ H$ est une homotopie de γ à γ_a, lacet constant égal à a.
Donc Ω est simplement connexe.
Par ailleurs, le théorème de Liouville assure que $\mathbb{C}$ n'est pas conformément équivalent au disque $\mathbb{D}$. Donc $\Omega \neq \mathbb{C}$.

($\Leftarrow$): Si on regarde le cas du disque $\mathbb{D}$, le lemme de Schwarz-Pick nous donne un critère pour chercher un automorphisme $f : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ en maximisant la dérivée en un point d'applications holomorphes nulles en ce point.

Supposons Ω simplement connexe et différent de $\mathbb{C}$. Soit z_0 un point de Ω.

Considérons l'ensemble

$$\{ f : \Omega \hookrightarrow \mathbb{D} \ ; \ f \in \mathcal{O}(\Omega) , f \text{ injective} , f(z_0) = 0 \}$$

noté Σ et notons M la quantité $\sup\limits_{f \in \Sigma} |f'(z_0)|$.

Montrons que Σ est non vide et que la borne M est atteinte en un élément $h \in \Sigma$ surjectif.

A cet effet, on utilise le lemme suivant

<u>Lemme</u>

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$

Soit $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $g \neq 0$ sur Ω. Alors g possède une racine carrée dans $\mathcal{O}(\Omega)$, c-à-d il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $g = f^2$.

<u>Etape 1</u> : Σ est non vide.

Soit ω un élément de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Comme Ω est simplement connexe et $z \longmapsto z - \omega$ est holomorphe et ne s'annule pas sur Ω, il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $\forall z \in \Omega \quad f(z)^2 = z - \omega$.

Alors f est non constante, donc ouverte.

Soit $a \in f(\Omega)$ et $r \in]0, |a|[$ tel que $B(a,r) \subset f(\Omega)$

Alors on a $\quad f(\Omega) \cap B(-a,r) = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe $z \in \Omega$ tel que $f(z) \in B(-a,r)$. Alors on a

$$-f(z) \in B(a,r)$$

On en déduit que pour tout $z' \in \Omega$ tel que $f(z') = -f(z)$ on a $f^2(z') = f^2(z)$ c-à-d $z = z'$ et donc $f(z) = 0$ ↯.

Par ailleurs, de la même façon on obtient que f est injective.

Notons h l'application $\dfrac{r}{2(f+a)}$. Alors h est bien définie, holomorphe et injective.

De plus, on a $\forall z \in \Omega \ |h(z)| < 1$, c-à-d $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$.
Quitte à composer par l'automorphisme du disque $\mathbb{D}$

$$\varphi_{h(z_0)} : z \longmapsto \frac{z - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)} z}$$

on peut supposer $h(z_0) = 0$, c-à-d $h \in \Sigma$.

Il s'en suit $0 < |h'(z_0)| \leq M$ car la dérivée d'une fonction holomorphe injective ne s'annule pas.

<u>Etape 2</u> : Surjectivité des maximisants. Soit $h \in \Sigma$.

Supposons que h ne soit pas surjective. Alors il existe $\ell \in \Sigma$ tel que $|h'(z_0)| < |\ell'(z_0)|$.

En effet, soit $\omega \in \mathbb{D} \setminus h(\Omega)$. Alors l'application

$$\Omega \underset{h}{\hookrightarrow} \mathbb{D} \underset{\varphi_\omega}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{D}$$

ne s'annule pas. Soit $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ une racine carrée de $\varphi_\omega \circ h$. Alors g est injective car φ_ω et h le sont.

Notons ℓ l'application $\varphi_{g(z_0)} \circ g$. Alors ℓ est dans Σ.

Notons c l'application $z \longmapsto z^2$ et F l'application $\varphi_{-\omega} \circ c \circ \varphi_{g(z_0)}$

On a alors

$$F \circ \ell = \varphi_{-\omega} \circ c \circ \varphi_{-g(z_0)} \circ \ell = \varphi_{-\omega} \circ c \circ g$$
$$= \varphi_{-\omega} \circ \varphi_\omega \circ h = h.$$

et $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ n'est pas injective. (car c ne l'est pas)

De plus on a $F(0) = 0$ car $c \circ \varphi_{g(z_0)}(0) = g(z_0)^2 = \varphi_\omega(0) = -\omega$ et $\varphi_{-\omega}(-\omega) = 0$.

Par le lemme de Schwarz, on obtient $|F'(0)| < 1$ (car non injective) et donc on obtient

$$|h'(z_0)| = |F'(\ell(z_0))| \, |\ell'(z_0)| < |\ell'(z_0)|$$

Ainsi tout élément de Σ_1 maximisant $|f'(z_0)|$ est surjectif.

Etape 3 : Existence d'un maximisant.

Soit (h_n) une suite d'éléments de Σ_1 tel que

$$\lim_{n\to+\infty} |h_n'(z_0)| = M$$

Comme Σ_1 est un ensemble de fonctions à valeurs dans $\mathbb{D}$, on a, pour tout compact $K \subset \Omega$ on a

$$\sup_{f\in\Sigma_1} \|f\|_K \leqslant 1$$

donc Σ_1 est relativement compact dans $\mathcal{O}(\Omega)$ par théorème de Montel.

Quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Par théorème de Weierstrass on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n' = h'$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$

et donc en particulier

$$|h'(z_0)| = \lim_{n\to+\infty} |h_n'(z_0)| = M > 0$$

On en déduit de plus que h est non constante (car $h' \neq 0$)

Comme h est alors ouverte, on obtient que $h(\Omega)$ est ouvert inclus dans $\overline{\mathbb{D}}$ donc dans $\mathbb{D}$.

Par ailleurs, on a aussi $h(z_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(z_0) = 0$.

Il reste à montrer que h est toujours injective.

Lemme

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}(\Omega)$ injectifs.
Si $f_n \xrightarrow{\mathcal{O}(\Omega)} f$ alors f est injective ou constante.

Preuve: supposons que f soit non constante. Soient a, b distincts dans Ω. La suite de fonctions $(f_n - f_n(a))$ ne s'annule pas sur l'ouvert connexe $\Omega \setminus \{a\}$ et converge vers $f - f(a)$.

Comme f est non constante, $f-f(a)$ est non nulle.
Par le théorème d'Hurwitz, $f-f(a)$ ne s'annule pas sur $\Omega \setminus \{a\}$.
En particulier, on a $f(b)-f(a) \neq 0$. Donc f est injective ■

On en déduit que h est injective. Donc un biholomorphisme. ■

Corollaire

Soit Ω un ouvert simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
Alors il existe un unique biholomorphisme $f : \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ tel que $f(z_0)=0$ et $f'(z_0)>0$.

Preuve: existence:

Soit $f : \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ un biholomorphisme. Notons

$$a = f(z_0) \quad \text{et} \quad f'(z_0) = u\rho$$

avec $|u|=1$ et $\rho>0$.

Notons h la composée $\varphi \circ f$ où $\varphi = \bar{u}\varphi_a$.

Alors on a $h(z_0)=0$ et

$$h'(z_0) = \varphi'(a) f'(z_0) = \frac{\bar{u} f'(z_0)}{(1-|a|^2)} = \frac{\rho}{1-|a|^2} > 0$$

Unicité: soient f_1, f_2 des représentations conformes de Ω vérifiant les hypothèses.

Alors $f_2 \circ f_1^{-1}$ est un automorphisme du disque φ tel que

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = \frac{f_2'(z_0)}{f_1'(z_0)} > 0$$

Par lemme de Schwarz, on obtient $\varphi = \mathrm{id}$ et donc $f_1 = f_2$.
Cela conclut ■

Bon. Quelques points sur les résultats utilisés.
Le premier lemme découle en partie du résultat suivant, qui utilise le théorème de Cauchy.

Proposition (Primitive)

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors il existe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $F' = f$.

On obtient ensuite l'existence de logarithme.

Proposition (Logarithme)

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $\forall z \in \Omega \ f(z) \neq 0$

Alors il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $f = e^g$.

Preuve :

Comme f ne s'annule pas sur Ω, le quotient $\frac{f'}{f}$ est holo-morphe sur Ω.

Soit $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $F' = \frac{f'}{f}$. On a alors

$$(fe^{-F})' = (f' - \frac{f'}{f}f)e^{-F} = 0$$

Comme Ω est connexe, on obtient que fe^{-F} est constante sur Ω. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \Omega \quad f(z)e^{-F(z)} = c$$

Alors on a $\forall z \in \Omega \quad f(z) = ce^{F(z)}$. Comme $z \longmapsto e^z$ est surjective, il existe $y \in \mathbb{C}$ tel que $c = e^y$ et donc $f = e^{F+y}$. ∎

Rmq : soient $a \in \Omega$ et $b \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = e^b$.
Alors on peut trouver un tel g tel que $g(a) = b$.
(en considérant $F + b - F(a)$)
Si g_1, g_2 vérifient cela, alors on a $e^{g_2 - g_1} = 1$, donc

$$\forall z \in \Omega \quad g_2(z) - g_1(z) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Comme $2\pi i \mathbb{Z}$ est dénombrable et Ω est connexe, on en déduit $g_2 = g_1$.

NB : le lemme est alors clair avec $f = e^{\frac{h}{2}}$ où h vérifie $e^h = g$.

Proposition

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non constante. Alors f est ouverte.

Preuve: soit V un ouvert de Ω et soit $a \in V$. Notons b la quantité $f(a)$.

Comme f n'est pas constante, le principe des zéros isolés assure qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset V$ et $f - b$ ne s'annule pas sur $\overline{B(a,r)} \setminus \{a\}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z \in \partial B(a,r)$ $|f(z) - b| \geqslant \varepsilon$ (compacité)

Montrons qu'on a $B(b, \frac{\varepsilon}{2}) \subset f(\overline{B(a,r)})$.

Soit $\omega \in B(b, \frac{\varepsilon}{2})$. Notons f_ω l'application $f - \omega$. Comme $|f_\omega|$ est continue, elle admet un minimum sur le compact $\overline{B(a,r)}$.

D'autre part, on a

$$\forall z \in \partial B(a,r) \qquad |f_\omega(z)| = |f(z) - \omega| \geqslant |f(z) - b| - |b - \omega| > \frac{\varepsilon}{2}$$

et $|f_\omega(a)| = |b - \omega| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi $|f_\omega|$ atteint son minimum sur $B(a,r)$. Comme f n'est pas constante, f_ω non plus et donc on en déduit que f_ω s'annule sur $B(a,r)$.

Cela conclut ∎

Théorème

Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}$. Supposons que a soit une racine d'ordre k de l'équation $f(z) = b$ d'inconnue z.

Alors pour tout voisinage U de a, il existe un voisinage $V \subset U$ de a et un voisinage W de b tel que pour tout $\omega \in W$ l'équation $f(z) = b$ possède exactement k solutions dans V (ces solutions étant simples si $\omega \neq b$)

Preuve:

Soit U un voisinage de a. Par le principe des zéros isolés, il existe $V \subset U$ un disque de centre a tel que f soit holomorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{V}$, a soit la seule racine de $f-b$ dans $\overline{V}$ et f' ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$

Alors $b \notin f(\partial V)$.

Soit W la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus f(\partial V)$ contenant b.
Alors comme le nombre de solution $n_{\overline{V}}(f, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \frac{f'(z)}{f(z)-\omega} dz$ pour $\omega \in W$ de l'équation $f(z) = \omega$ dépend continûment de ω il est constant sur W connexe.

Ainsi on a $\forall \omega \in W \quad n_{\overline{V}}(f, \omega) = k$. Donc $f(z) = \omega$ a k racines dans $\overline{V}$. Comme $\omega \notin f(\partial V)$, elles sont dans V

Si $\omega \neq b$ alors elles sont différentes de a et donc simples car f' ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$.

Cela conclut ∎

Corollaire

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ injective. Alors f' ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

Preuve:

Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Comme f est injective, l'équation $f(z) = \omega$ ne peut pas admettre des racines différentes.

Ainsi pour tout $a \in \Omega$, a ne peut pas être racine de $f(z) = f(a)$ d'ordre strictement plus grand que 1.

Nécessairement $f'(a) \neq 0$

Cela conclut ∎

Lemme (Schwarz)

Soit $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorphe tel que $f(0) = 0$.

Alors on a

(i) $\forall z \in \mathbb{D} \ |f(z)| \leqslant |z|$

(ii) $|f'(0)| \leqslant 1$

De plus, s'il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $|f(a)| = |a|$ et $a \neq 0$.
ou si $|f'(0)| = 1$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\lambda| = 1 \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{D} \ f(z) = \lambda z.$$

Preuve :

Comme $f(0) = 0$, il existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = z g(z)$$

et

$$g(0) = f'(0)$$

Soit $r \in]0,1[$. On a par principe du maximum sur $B(0,r)$

$$\sup_{z \in \overline{B(0,r)}} |g(z)| \leqslant \max_{z \in \partial B(0,r)} |g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$$

car $|f| \leqslant 1$. D'où pour tout $z \in \mathbb{D}$, pour tout $r \in]|z|, 1[$

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$$

par passage à la limite on obtient $|g| \leqslant 1$ d'où (1) et (2).

Soit $a \in \mathbb{D}$ tel que $|f(a)| = |a|$ et $a \neq 0$. Alors on a $|g(a)| = 1$
Comme $\forall z \in \mathbb{D} \ |g(z)| \leqslant 1$, par principe du maximum, il existe $\lambda \in \partial \mathbb{D}$ tel que $g = \lambda$, c-à-d pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \lambda z$$

Cela conclut ■

Théorème

On a
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \longmapsto \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \ ; \ a \in \mathbb{D},\ |\lambda| = 1 \right\}$$

Preuve :

Notons pour $a \in \mathbb{D}$, φ_a l'application $z \longmapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Etape 1 : $\forall a \in \mathbb{D}$ $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$

Soit $a \in \mathbb{D}$. On a $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. En effet, soit y, z dans $\mathbb{D}$. on a :

$$\varphi_a(z) = y \iff \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = y \iff z - a = y(1-\bar{a}z)$$
$$\iff z(y\bar{a}+1) = y + a \iff z = \frac{y-(-a)}{1-(-\bar{a})y}$$
$$\iff z = \varphi_{-a}(y)$$

Par ailleurs, on a aussi

$$1 - \frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = 1 - \frac{|z|^2+|a|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{a})}{1+|a|^2|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{a})}$$
$$= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0$$

Ainsi φ_a est une automorphisme de $\mathbb{D}$.

Etape 2 : soit $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Notons f la composée $\varphi_{g(0)} \circ g$.

Alors $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et $f(0) = 0$

Par lemme de Schwarz appliqué à f et à f^{-1}, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad |f(z)| = |z|$$

et donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = \lambda z.$$

Donc au final, on a $g = \varphi_{-g(0)} \circ \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Cela conclut ∎

Lemme (Schwarz-Pick)

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Notons pour u, v dans $\mathbb{D}$, $d(u,v)$ la quantité $\left|\frac{u-v}{1-\bar{u}v}\right|$.

Alors pour tous z_1, z_2 dans $\mathbb{D}$ on a

$$d(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) \leqslant d(z_1, z_2)$$

En particulier, on a

$$|\varphi'(z_1)| \leqslant \frac{1-|\varphi(z_1)|^2}{1-|z_1|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z_1|^2}$$

avec égalité des valeurs extrêmes ssi φ est un automorphisme, nul en z_0.

__Preuve__ : Soient z_1, z_2 dans $\mathbb{D}$. Notons ω l'élément $\varphi(z_1)$ et ψ l'application $\varphi_\omega \circ \varphi \circ \varphi_{-\omega}$.

Alors on a $\psi(0) = \varphi_\omega(\omega) = 0$ et $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Par le lemme de Schwarz, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad |\psi(z)| \leqslant |z|$$

et donc en particulier, pour $z = \varphi_{z_1}(z_2)$ on obtient

$$|\varphi_\omega(\varphi(z_2))| \leqslant |\varphi_{z_1}(z_2)|$$

c-à-d

$$\frac{|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)|}{|1 - \overline{\varphi(z_2)}\varphi(z_1)|} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}$$

puis en faisant tendre z_2 vers z_1 on obtient la seconde inégalité.

Enfin, si $|\varphi'(z_1)| = \frac{1}{1-|z_1|^2}$ alors on a clairement $\varphi(z_1) = 0$.

Puis on obtient $|\psi'(0)| = 1$. En effet, on a

$$\psi'(0) = \varphi'_\omega(\omega)\varphi'(z_1)\varphi'_{-\omega}(0) = (1-|\omega|^2)^{-1}\varphi'(z_1)(1-|z_1|^2)$$

et donc par lemme de Schwarz, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

La réciproque est claire par la description précédente de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Cela conclut ■