Théorème de représentation des fonctions lipschitziennes

Leçons : 207, 208, 228, 234, 235

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Alors les deux propriétés sont équivalentes

(i) f est lipschitzienne

(ii) Il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)\,dt$$

Résultat

Soit $T \in L^1(\mathbb{R})'$. Alors il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \qquad T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)\,dt$$

Preuve :

((ii) => (i)) : Supposons qu'il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)\,dt$$

Alors on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |x-y|$$

donc f est $\|g\|_\infty$-lipschitzienne.

((i) => (ii)) : Supposons que f soit M-lipschitzienne avec $M \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère l'application suivante, notée ξ, linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx \end{aligned}$$

Ce n'est autre que la dérivée faible de F.

Etape 1 : ξ est continue pour la norme $\|.\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note φ_n l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi_n(x) := n\left(\varphi(x+\tfrac{1}{n}) - \varphi(x)\right)$$

Comme φ est à support compact, φ_n l'est aussi avec

$$\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset \mathrm{Supp}(\varphi) + [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}] \subset \mathrm{Supp}(\varphi) + [-1, 1]$$

D'où $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Puis par théorème de convergence dominée on a

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} -\int_{\mathbb{R}} F(x)\, n\left(\varphi(x+\tfrac{1}{n}) - \varphi(x)\right) dx}_{= \xi(\varphi_n)} = -\int_{\mathbb{R}} F(x) \lim_{n\to+\infty} n\left(\varphi(x+\tfrac{1}{n}) - \varphi(x)\right) dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$= \xi(\varphi)$$

où la domination se fait par $F(x)\,\|\varphi'\|_\infty \mathbb{1}_{\mathrm{Supp}(\varphi)+[-1,1]}(x)$

En outre, on a aussi

chgt var $u = x + \frac{1}{n}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi_n(x)\,dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} nF(x-\tfrac{1}{n})\varphi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} nF(x)\varphi(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} n\left(F(x-\tfrac{1}{n}) - F(x)\right)\varphi(x)\,dx \right|$$

$$\leqslant M \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx = M\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Donc en passant à la limite en n, on obtient

$$|\xi(\varphi)| = \lim_{n\to+\infty} |\xi(\varphi_n)| \leqslant M\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ainsi ξ est bien continue pour la norme $\|.\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Etape 2 : On prolonge ξ continuement à $L^1(\mathbb{R})$

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_{L^1(\mathbb{R})})$ et ξ est une forme linéaire continue, il existe $T \in L^1(\mathbb{R})'$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \quad T(\varphi) = \xi(\varphi)$$

Etape 2 bis : Il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx$$

par le résultat admis au départ. (voir à la fin la preuve)
On a alors en particulier

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \quad \xi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx$$

et donc $g = f'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Etape 3 : Notons h l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x g(t)\,dt \end{array}$. Montrons que $h' = g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (rmq : $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$)
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\langle h', \varphi \rangle = -\langle h, \varphi' \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \int_0^x g(t)\,dt\, \varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_0^{+\infty}\int_0^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx - \int_{-\infty}^0 \int_0^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx \\
&= -\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq x\}} g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx - \int_{-\infty}^0\int_0^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx \\
\text{Fubini} \quad &= -\int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} g(t)\varphi'(x)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^t g(t)\varphi'(x)\,dx\,dt \\
&= +\int_0^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 g(t)\varphi(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)\,dt = \langle g, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Justification Fubini : Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi') \subset [-R, R]$.
Alors on a

$$|g(t)\varphi'(x)\mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq x\}}| \leq \|g\|_\infty \varphi'(x)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)$$

pour presque tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, où

$$(t,x) \longmapsto \|g\|_\infty \varphi'(x)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi $h' = g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Etape 4 : On conclut.

On a $f' = g = h'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc

$$(f-h)' = 0 \qquad (\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f - h = C$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Or f et h sont continues donc $f = h + C$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
On a alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) - f(y) = \int_0^x g(t)\,dt - \int_0^y g(t)\,dt$$
$$= \int_y^x g(t)\,dt.$$

Preuve du résultat :

Rappel : T est le prolongement linéaire continu de $\mathcal{E}$ à $L^1(\mathbb{R})$. et on a $\|T\|_{L^1(\mathbb{R})'} \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a la suite d'injections suivante

$$L^2(-n,n) \hookrightarrow L^1(-n,n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$$

où la première est obtenue par inégalité de Cauchy-Schwarz et la deuxième en prolongeant par zéro.

(donc $T(\varphi)$ avec $\varphi \in L^2(-n,n)$ a un sens)

En particulier, $T_{\restriction L^2(-n,n)}$ définit une forme linéaire continue donc par théorème de Riesz, il existe $g_n \in L^2(-n,n)$ tel que

$$\forall \varphi \in L^2(-n,n) \quad T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g_n(t)\varphi(t)\,dt$$

et un tel g_n est unique

(*) $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^* \forall m \in \mathbb{N}^* \quad m > n \Rightarrow g_{m\restriction]-n,n[} = g_n}$

Soient n, m dans $\mathbb{N}^*$ tels que $m > n$.
Le prolongement par zéro donne une injection

$$L^2(-n,n) \hookrightarrow L^2(-m,m)$$

et donc on a

$$\forall \varphi \in L^2(-n,n) \qquad T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g_m(t)\varphi(t)\,dt$$

Par unicité, on en déduit $g_{m\restriction]-n,n[} = g_n$.

(*) Notons g l'application $\liminf g_n$ et montrons que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Supposons que $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} > M$.

Alors l'ensemble $B := \{x \in \mathbb{R} \,/\, |g(x)| > M\}$ n'est pas de mesure nulle.

Or on a

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B \cap [-n,n]$$

donc comme $(B \cap [-n,n])$ est une suite croissante de boréliens on obtient

$$0 < \lambda(B) = \lim_{n \to +\infty} \lambda(B \cap [-n,n])$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda(B \cap [-n,n]) > 0$.

Notons u l'application $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(g) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(g)$. On a alors

$$|g| = ug$$

et

$$u \mathbb{1}_{B \cap [-n,n]} \in L^2(-n,n)$$

Donc

$$\begin{aligned} T(u \mathbb{1}_{B\cap[-n,n]}) &= \int_{-n}^{n} g_n(t) u(t) \mathbb{1}_{B \cap [-n,n]}(t)\, dt \\ &= \int_{B \cap [-n,n]} g(t) u(t)\, dt \\ &= \int_{B\cap[-n,n]} |g(t)|\, dt > M \lambda(B \cap [-n,n]) \end{aligned}$$

car $g \restriction_{]-n,n[} = g_n$, c-à-d $T(u\mathbb{1}_{B\cap[-n,n]}) > M \|u \mathbb{1}_{B\cap[-n,n]}\|_{L^1}$

Contradiction ↯ car $\|T\|_{L^1(\mathbb{R})'} \leq M$.

Nécessairement $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

pas évident!

De plus, on a $T = g$ au sens des distributions, donc $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)\, dt$ pour tout $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.