Développement: Décomposition en valeurs singulières et normes de Ky Fan

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on montre le théorème spectral à partir de la réduction des formes quadratiques.

Proposition 1. (réduction des formes quadratiques)
Soit q une forme quadratique sur E un K-espace vectoriel de dimension finie où K est un corps de caractéristique différente de deux. Alors q admet une base orthogonale.

Démonstration. Quitte à se ramener à la restriction de q à un supplémentaire du noyau, on peut supposer que q est non dégénérée. On procède alors par récurrence sur la dimension de l'espace, en prenant x puis en considérant son orthogonal, auquel on applique l'hypothèse de récurrence. En ajustant les vecteurs de la base ainsi obtenue, on remarque que les coefficients de la matrice diagonale dans cette base peuvent être pris modulo les carrés de K. □

Proposition 2. (orthogonalisation simultanée)
On se place ici dans un espace euclidien avec un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit q une forme quadratique (que l'on peut supposer non dégénérée comme avant). Il existe une base orthonormée de E qui est orthogonale pour q.

Démonstration. On va encore procéder par récurrence. Notre but est ici de trouver un x anisotrope pour q tel que les orthogonaux de x pour q et le produit scalaire coïncident. Ces deux espaces étant des hyperplans, leur égalité correspond à la proportionnalité des formes linéaires dont ils sont les noyaux, à savoir $b(x, \cdot)$ et $\langle x, \cdot \rangle$. Représentons alors cette première forme linéaire avec le théorème de Riesz, il existe $a(x) \in E$ tel que $b(x, \cdot) = \langle a(x), \cdot \rangle$. Par unicité de $a(x)$, a définit un opérateur linéaire sur E, qui est auto-adjoint par symétrie de b. Ainsi, notre vecteur anisotrope existe si et seulement si notre opérateur a admet un vecteur propre, ce qui existe en considérant un vecteur propre complexe puis en conjuguant. □

Remarque 3. À chaque forme quadratique de E on peut associer un opérateur auto-adjoint de E et réciproquement.

Théorème 4. (valeurs singulières et Courant-Fischer)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P\mathrm{diag}\left(\sigma_1(A), \ldots, \sigma_r(A), 0, \ldots, 0\right) Q^\top =: P\Sigma Q^\top,$$

avec $\sigma_1(A) \geq \ldots \geq \sigma_r(A) \geq 0$ les *valeurs singulières* de A. Si G_d est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ de dimension d, alors :

$$\sigma_k(A) = \min_{W \in G_{p-k+1}} \max_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \max_{W \in G_p} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

Démonstration. D'après le théorème spectral, il existe une matrice $V \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^\top A = V\,\mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2)\,V^\top$ ($\sigma_i \geq 0$) où les valeurs propres sont des carrés car positives et où on les a rangées par ordre décroissant. Il reste alors à trouver $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $AV = U\Sigma$. Si on note v_i les colonnes de V, on cherche à avoir $Av_i = \sigma_i u_i$ pour $i \leq r$ et $Av_i = 0$ sinon.

La deuxième condition est vérifiée puisque $\ker(A) = \ker(A^\top A)$ et pour la première on prend $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ et on vérifie qu'elle convient. Il reste juste à compléter notre base par une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Montrons le théorème minmax. Soit W un sous-espace de dimension k. Par Grassmann, on peut trouver un vecteur de W qui est combinaison linéaire de $e_k, \dots, e_n$ les derniers vecteurs propres de $A^\top A$. On a alors $\|Ax\|^2 = \langle A^\top A x, x\rangle = \sum_{i=k}^n \sigma_i^2 x_i^2 \leq \sigma_k^2$, et le minimum est atteint lorsqu'on prend pour W le sous-espace engendré par les k premiers vecteurs propres. □

Théorème 5. (Eckart-Young)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de SVD $A = P\Sigma Q^\top$. Si on note Σ_k la matrice où l'on a gardé uniquement les k premières valeurs singulières, alors $A_k := P\Sigma_k Q^\top$ est la meilleure approximation de A de rang k pour la norme spectrale.

Démonstration. Par décomposition en valeurs singulières, cela revient à minimiser $\|B - \Sigma\|$ pour $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang k. Par la formule de Grassmann et le théorème du rang, il existe un vecteur dans $\mathrm{Vect}(e_1, ldots, e_p) \cap \ker(B)$ ((e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^p$). On a alors $(\Sigma_k - B)x = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \sigma_i e_i$ d'où $\|\Sigma - B\|^2 \geq \|\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 |x_i|^2\| \geq \sigma_{k+1}^2$. En prenant $B = \Sigma_k$, on obtient le résultat voulu. □

Définition 6. Pour $1 \leq k \leq p$, on définit la k-ième *norme de Ky Fan* de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ comme la somme de ses k premières valeurs singulières, on la note $N_k(A)$.

Théorème 7. La norme k de Ky Fan vérifie la formulation variationnelle suivante :

$$N_k(A) = \max_{\substack{U^\top U = V^\top V = I_k \\ U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \\ V \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})}} \mathrm{Tr}(U^\top A V).$$

C'est donc une norme.

Démonstration. On se fixe un $k \in \{1, \dots, p\}$. Soit $i \in \{1, \dots, k\}$, et W de dimension i dans $\mathbb{R}^k$, soient U, V comme dans le max. On applique le minmax une première fois à la matrice $U^\top A V$:

$$\sigma_i(U^\top A V) = \max_{W \in G_i(\mathbb{R}^k)} \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in W}} \|U^\top A V x\|,$$

ce que l'on peut réécrire en considérant le changement de variable $y = Vx$:

$$\sigma_i(U^\top A V) = \max_{W \in G_i(\mathbb{R}^k)} \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in V(W)}} \|U^\top A y\|,$$

puisque pour $x \in \mathbb{R}^k$, $\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^\top V x, x\rangle = \|x\|^2$. Or pour tout $z \in \mathbb{R}^p$, $\|U^\top z\| \leq \|z\|$ puisque $\|U^\top\|^2 = \rho(U^\top U) = \rho(UU^\top) = \|U\|_2 = 1$. Ainsi pour tout $y \in V(W)$:

$$\|U^\top A y\| \leq \|Ay\| \text{ donc } \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in V(W)}} \|U^\top A y\| \leq \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in V(W)}} \|Ay\|$$

En prenant le maximum sur $W \in G_i(\mathbb{R}^k)$, on obtient $\sigma_i(U^\top A V) \leq \max_{W \in G_i(\mathbb{R}^k)} \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in V(W)}} \|Ay\|$.
En considérant W_0 pour lequel le maximum de droite est atteint, on a

$$\sigma_i(U^\top A V) \leq \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in V(W_0)}} \|Ay\|.$$

Mais W_0 est de dimension i dans $\mathbb{R}^k$ et V est injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^p$ donc $V(W_0) \in G_i(\mathbb{R}^p)$. Somme toute :

$$\sigma_i(U^\top AV) \leq \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in V(W_0)}} \|Ay\| \leq \max_{W' \in G_i(\mathbb{R}^p)} \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in W'}} \|Ay\| = \sigma_i(A).$$

En particulier, $N_k(U^\top AV) \leq N_k(A)$.

Par ailleurs, si $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ on a, si $B = PDQ^\top$ est sa SVD :

$$|\operatorname{Tr}(B)| = |\operatorname{Tr}(PDQ^\top)| = |\operatorname{Tr}(DQ^\top P)| \leq \sum_{i=1}^k \sigma_i(B)|(Q^\top P)_{i,i}| \leq N_k(B).$$

En appliquant ce résultat à $B = U^\top AV$, on a $\operatorname{Tr}(U^\top AV) \leq N_k(U^\top AV) \leq N_k(A)$. Et le maximum est atteint lorsque U et V sont les k premiers vecteurs singuliers de A à gauche et à droite.

$\square$

Proposition 8. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, on définit sa *pseudo-inverse* en inversant les valeurs singulières dans la décomposition en valeurs singulières, et on la note $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^\top$. La solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés de norme minimale est unique et vaut $A^\dagger b$.

Démonstration. On montre avec du calcul différentiel que x est solution au sens des moindres carrés si et seulement si c'est une solution de $A^\top Ax = A^\top b$. On vérifie ensuite que notre solution x_b est bien solution de cette équation. Par ailleurs on montre que $x - x_b \in \ker(A^\top A)$ pour x autre solution au sens des moindres carrés, et que $x_b \in \ker(A^\top A)^\perp$ donc le résultat suit par Pythagore. $\square$

Pour finir, une preuve alternative du théorème d'Eckart-Young qui est plus forte.

Proposition 9. Soient X et Y deux matrices rectangulaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $(n \geq p)$. Alors

$$\sigma_{i+j-1}(X+Y) \leq \sigma_i(X) + \sigma_j(Y) \qquad (i+j-1 \leq p).$$

Démonstration. On utilise les formulations variationnelles de Courant-Fischer. Soit V de dimension $p-i+1$, soit W de dimension $p-j+1$ tels que

$$\sigma_i(X) = \max_{V \cap S} \|Xx\| \text{ et } \sigma_j(Y) = \max_{W \cap S} \|Yy\|.$$

Ainsi, si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^p$ de dimension $i+j-1$, la formule de Grassmann implique que $F \cap V \cap W \neq \{0\}$. Soit donc $z \in F \cap V \cap W \cap S$.

$$\|(X+Y)z\| \leq \|Xz\| + \|Yz\| \leq \sigma_i(X) + \sigma_j(Y),$$

d'où le résultat en prenant le min sur z puis le max sur F. $\square$

Corollaire 10. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de SVD $A = P\Sigma Q^\top$. Si on note Σ_k la matrice où l'on a gardé uniquement les k premières valeurs singulières, alors $A_k := P\Sigma_k Q^\top$ est la meilleure approximation de A de rang k pour la norme spectrale, et pour la norme de Frobenius.

Démonstration. Si B est une matrice de rang k, alors pour $j = k+1$ dans l'inégalité précédente, $Y = B$ et $X = A - B$, on a

$$\sigma_{i+k}(A) \leq \sigma_i(A-B) \qquad (1 \leq i \leq p-k).$$

Pour avoir le résultat pour la norme spectrale, il suffit de prendre $i = 1$, et pour la norme de Frobenius, on somme sur les i :

$$\|A - B\|_{\mathrm{F}}^2 \geq \sum_{i=1}^{p-k} \sigma_i^2(A - B) \geq \sum_{i=k+1}^{p} \sigma_i^2(A).$$

On atteint bien l'égalité pour $B = A_k$. $\square$