Développement: Automorphismes du groupe symétrique

Arthur Maritch-Roy

On se propose de montrer dans ce développement le théorème suivant.

Théorème 1. Tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs pourvu que n soit différent de 6.

Démonstration. Pour montrer que notre automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ est intérieur, on va montrer qu'il envoie les transpositions sur les transpositions. En effet, si c'est le cas, il envoie la transposition $\tau_i = (1\,i)$ sur une transposition pour tout i. De plus, pour $i \neq j$, les images par φ de τ_i et τ_j ne commutent pas donc sont à supports non disjoints. On peut alors poser $\varphi(\tau_2) = (\alpha_1\,\alpha_2)$ et $\varphi(\tau_3) = (\alpha_1\,\alpha_3)$.

Mais alors, pour $i > 3$, si $\varphi(\tau_i) = (\alpha_2\,\alpha_3)$, alors puisque $(\alpha_1\,\alpha_2)(\alpha_1\,\alpha_3)(\alpha_2\,\alpha_3) = (\alpha_1\,\alpha_3)$ on aurait, en appliquant φ^{-1} :

$$(1\,2)(1\,3)(1\,i) = (1\,3)$$

ce qui n'est pas. Ainsi, $\varphi(\tau_i) = (\alpha_1, \alpha_i)$ pour des $\alpha_i \in [\![1, n]\!]$. Par injectivité de φ, α définit une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Cette permutation vérifie

$$\varphi(\sigma) = \alpha\,\sigma\,\alpha^{-1} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

et φ est alors intérieur. Il reste donc à montrer que notre φ envoie bien les transpositions sur les transpositions. Les transpositions correspondent à la classe de conjugaison d'une transposition. Or un automorphisme envoie une classe de conjugaison d'un élément d'ordre 2 sur une classe de conjugaison d'un élément d'ordre 2, *i.e.* d'un produit de k transpositions à supports disjoints. Ainsi, par le lemme de dénombrement des classes de conjugaison, on a, pour un certain $k \leq \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{2} = \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \\
&\Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{2^{k-1}k!(n-2k)!} = 1 \\
&\Leftrightarrow \binom{n-2}{2k-2} \times \frac{(2k-3)(2k-5)\ldots 3}{k} = 1.
\end{aligned}$$

Si $k > 3$, $2k - 3 > k$ donc l'égalité est fausse. Ainsi, pour que φ ne soit pas intérieur, il faut que k vaille 2 ou 3. Si il vaut 2, on a $(n-2)(n-3) = 4$ ce qui est impossible et s'il vaut 3, alors $\binom{n-2}{4} = 1$ ce qui impose $n - 6$. $\square$

Un petit mot rapide sur le lemme.

Lemme 1. Le cardinal de la classe de conjugaison d'une permutation est donné en fonction de son type $(k_1, \ldots, k_n)$ par la formule :

$$|\mathcal{O}_{k_1,\ldots,k_n}| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}}.$$

Démonstration. Pour voir cela, on se ramène au calcul du cardinal du centralisateur associé. Ce centralisateur correspond exactement aux permutations qui commutent avec notre permutation donnée σ. Pour commuter avec σ, d'après la formule de conjugaison des cycles, il faut et il suffit d'effectuer une permutation cyclique sur chacun des k_i cycles de longueur i d'où un facteur $\prod_{i=1}^{n} i^{k_i}$, et de permuter les k_i i-cycles entre eux, ce qui correspond au produit $\prod_{i=1}^{n} k_i!$. On conclut alors par la relation orbite-stabilisateur. $\square$

Référence : Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*. On peut en trouver une version détaillée sur la page de Rémi Moreau.