

Développement: Théorème de Charkovski

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on présente un résultat élémentaire d'analyse réelle, le théorème de Charkovski, qui s'énonce souvent ainsi :

"Trois-cycle implique chaos."

En effet, il stipule qu'une fonction définie d'un intervalle fermé dans lui-même possède un point de toute période dès lors qu'elle possède un point de période trois. Précisons le propos en introduisons les définitions nécessaires à l'énoncé du théorème.

Dans tout le développement, f désigne une fonction continue définie sur un segment fermé D et à valeurs dans D . La notation f^k désigne la fonction $f \circ \dots \circ f$, avec k termes.

Définition 1. Un point $x \in D$ est de période p ou p -périodique lorsque :

$$f^p(x) = x \text{ et } f^k(x) \neq x \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, p-1\}.$$

Pour $p = 1$, cela correspond à un point fixe.

Proposition 1. Soit g une fonction continue définie d'un segment $[a, b]$ dans lui-même. Alors g admet un point fixe.

Démonstration. Soit $h(x) = g(x) - x$. La fonction h est continue sur $[a, b]$ et $h(a)$ est positif alors que $h(b)$ est négatif. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, h doit s'annuler sur $[a, b]$, ce qui revient exactement à dire que g possède un point fixe. \square

Définition 2. Soient I et J deux segments inclus dans D . On dit que I recouvre J (par f) lorsque $J \subset f(I)$. On note alors $I \rightsquigarrow J$.

Avec cette notation, la proposition précédente se réécrit : si $I \rightsquigarrow I$, alors f admet un point de période 1. On peut généraliser ce résultat à des périodes plus grandes.

Lemme 1. Si $I \rightsquigarrow J$, alors il existe un segment $K \subset I$ tel que $f(K) = J$.

Démonstration. Soit $J = [a, b]$ et α et β des antécédents respectifs de a et b dans I et on suppose $\alpha < \beta$. On considère alors :

$$u = \max\{x \in [\alpha, \beta], f(x) = a\} \text{ et } v = \min\{x \in [u, \beta], f(x) = b\},$$

et $K = [u, v]$. On sait que $f(u) = a$ et $f(v) = b$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $J \subset f(K)$. Réciproquement, soit $y \in f(K)$ si $y < a$, alors on a un $x \in]u, v[$ tel que $f(x) < a$, et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $u' > u$ tel que $f(u') = a$, ce qui contredit la maximalité de u . On fait pareil de l'autre côté, ce qui achève la preuve du lemme. \square

Proposition 2. Supposons que l'on ait une chaîne $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow I_{n-1} \rightsquigarrow I_0$. Alors il existe $x \in I_0$ tel que $f^n(x) = x$, et $f^k(x) \in I_k$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Démonstration. D'abord, on exhibe avec le lemme un segment $K_{n-1} \subset I_{n-1}$ tel que $f(K_{n-1}) = I_0$. Ensuite, on exhibe $K_{n-2} \subset I_{n-2}$ tel que $f(K_{n-2}) = K_{n-1}$. De proche en proche, on se retrouve avec une suite $K_0 \rightsquigarrow K_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow K_{n-1} \rightsquigarrow I_0$, où l'on a à chaque fois égalité. Ainsi, comme $K_0 \subset I_0 = f^n(K_0)$, il existe d'après la première proposition un $x \in K_0$ tel que $f^n(x) = x$. Mais comme $x \in K_0$ et que l'on a la chaîne précédente, on a $f^k(x) \in K_k \subset I_k$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, ce qui achève la preuve. \square

Théorème 3. (de Charkovski)

Si f possède un point de période 3, alors elle possède un point à toute période.

Démonstration. Soit a un point de période trois, et $b = f(a)$, $c = f(b)$ (et alors $f(c) = a$). Par symétrie on peut supposer $a < b$ et $a < c$. Il y a alors deux cas à traiter. Dans tous les cas, on sait que l'on a un point fixe.

Commençons par le cas $a < b < c$. On note $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_0$. Avec la proposition précédente, on peut considérer un $x \in I_0$ tel que $f^2(x) = x$. Si $f(x) = x$, alors nécessairement $x \in I_1 \cap I_0$ donc $x = b$, ce qui contredit $f(x) = x$. Donc ce x est bien un point de période 2. Soit maintenant $n \geq 4$. On considère la suite $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_0$, avec $(n-1)$ fois I_1 . On considère à nouveau un x comme dans la proposition précédente. S'il existe un $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $f^k(x) = x$, alors $x \in I_0 \cap I_1$, ce qui entraîne à nouveau $x = b$ donc $f^2(x) = a \notin I_1$, ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, f admet bien un point de toute période.

Dans le cas $a < c < b$, avec $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$ on a toujours les mêmes chaînes d'intervalles. Dans le cas $n = 2$, si x est comme dans la proposition avec $f(x) = x$, alors $x = c$ et x ne peut pas être de période 2. Dans le cas $n \geq 4$, et pour un x de la proposition avec $f^k(x) = x$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $x = b$, mais alors $f^2(x) = a \notin I_1$, ce qui contredit les hypothèses. \square

Remarque 1. Ce qui coïncide dans le cas où f a un point périodique de période 4 survient dans le cas où l'orbite n'est pas croissante. Dans le cas $x < f(x) < f^2(x) < f^3(x)$, on peut faire la même preuve et avoir un point périodique à toute période.

Exemple 1. La fonction $x \mapsto (x + \frac{1}{2})\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} + (4 - 2x)\mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$, aussi simple soit-elle, admet des points périodiques à toutes les périodes.

Par contre, la fonction $x \mapsto (1 - x)$ n'a que des points de période 2, et on voit que l'existence d'un point de période trois est importante.

Référence : Francinou, Gianella, Nicolas : *Oraux X-ENS Analyse 1*.