

# Développement: Fonction gamma et formule des compléments

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on définit la fonction gamma sur  $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$  et on montre la formule des compléments.

**Définition 1.** On définit la fonction gamma sur  $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$  par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

**Proposition 1.** La fonction gamma est bien définie sur  $\Omega_0$ , et définit une fonction holomorphe sur tout ce domaine.

*Démonstration.* Pour montrer que  $\Gamma$  est bien définie, on écrit  $|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\ln(t)}| = e^{(\operatorname{Re}(z)-1)\ln(t)} = t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ , qui est intégrable au voisinage de 0 et négligeable devant  $t^2 e^{-t}$  au voisinage de l'infini. Ainsi, le module de l'intégrande est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , et on est bons.

Pour montrer qu'elle est holomorphe, on va passer par le théorème d'holomorphicité sous l'intégrale. Il est clair que pour  $t$  fixé,  $t^{z-1} e^{-t} = e^{(z-1)\ln(t)} e^{-t}$  est holomorphe en  $z$ , et que pour  $z$  fixé, cette même expression est continue en  $t$ . Soient maintenant  $\beta > \alpha > 0$ . Pour  $z$  de partie réelle supérieure à  $\alpha$ , et inférieure à  $\beta$ , on a :

$$|t^{z-1} e^{-t}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1} e^{-t} \mathbf{1}_{]0,1]}(t) + t^{\beta-1} e^{-t} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t) =: g(t),$$

où  $g$  est intégrable et ne dépend pas de  $z$ . Ainsi, on peut dominer par une fonction intégrable qui ne dépend pas de  $z$  sur tout compact et conclure.  $\square$

**Remarque 1.** En effectuant une intégration par parties, on peut remarquer que  $\Gamma$  satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

et qu'en particulier pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ . En effet :

$$\Gamma(z+1) = [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

**Théorème 2.** La fonction gamma se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\Omega := \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ , avec un pôle simple en  $-n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de résidu  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

*Démonstration.* On va se servir de l'équation fonctionnelle précédente. Soit  $\Omega_n = \{z, \operatorname{Re}(z) > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}$ . Pour  $z \in \Omega_0$ , on peut écrire :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z-n+1) \cdots (z+1)z}.$$

Et on peut alors remarquer que cette expression définit une fonction holomorphe sur  $\Omega_n$ , qui coïncide donc avec  $\Gamma$  sur  $\Omega_0$ . Ceci valant pour tout  $n$ , on crée une suite de prolongements qui coïncident deux à deux car ils sont toujours égaux sur  $\Omega_0$ . L'expression utilisée pour prolonger

gamma montre que ses seuls pôles sont les entiers négatifs. De plus, elle permet de calculer les résidus :

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z-n+1)\cdots(z+1)z} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)\cdots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

**Théorème 3.** (Formule des compléments) Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

*Démonstration.* Si on montre cette formule pour  $z \in ]0, 1[$ , on pourra conclure par le principe des zéros isolés car  $]0, 1[$  est un sous-ensemble de  $\Omega$  qui admet un point d'accumulation, puisque les deux membres de l'égalité sont holomorphes sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Soit donc  $s \in ]0, 1[$ . D'après le théorème de Fubini :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-s} e^{-u} t^{s-1} e^{-t} du dt = \int_0^\infty \int_0^\infty (vt)^{-s} e^{-vt} t^s e^{-t} dv dt = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v} dv.$$

où l'on a posé  $v = \frac{u}{t}$ , et où l'on a éventuellement utilisé la symétrie du problème à la dernière égalité. Ainsi, si on pose  $v = e^x$ , on se ramène finalement à calculer l'intégrale suivante :

$$I(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{sx}}{1+e^x} dx.$$

Pour calculer cette intégrale, on va utiliser le théorème des résidus. On considère le contour rectangulaire  $\gamma_R$  dont les sommets sont  $-R, R, R+2i\pi, -R+2i\pi$ , parcouru dans le sens direct. À l'intérieur de ce contour,  $g : z \mapsto \frac{e^{sz}}{1+e^z}$  définit une fonction méromorphe, avec un pôle simple en  $i\pi$ , dont le résidu vaut :

$$\text{Res}(g, i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z-i\pi) \frac{e^{sz}}{1+e^z} = \lim_{z \rightarrow i\pi} e^{sz} \frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = e^{is\pi} e^{-i\pi} = -e^{is\pi}.$$

D'après le théorème des résidus, on a, pour  $R > 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} g(z) dz &= -2i\pi e^{-is\pi} \\ &= \int_{-R}^R g(x) dx - \int_{-R}^R g(x+2i\pi) dx + \int_0^{2\pi} g(R+i\theta) i d\theta - \int_0^{2\pi} g(-R+i\theta) i d\theta. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers  $I(s)$  l'intégrale de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  car  $g$  est intégrable donc on peut faire une convergence dominée. Le deuxième terme vaut :

$$- \int_{-R}^R \frac{e^{sx+2i\pi s}}{1+e^{2i\pi+x}} dx = -e^{2i\pi s} \int_{-R}^R g(x) dx,$$

et tend donc vers  $-e^{2i\pi s} I(s)$  lorsque  $R$  tend vers l'infini. Les deux autres termes se majorent directement sans convergence dominée par une exponentielle décroissante donc tendent vers 0. Somme toute, on a donc :

$$I(s)(1 - e^{2i\pi s}) = -2i\pi e^{i\pi s}.$$

En utilisant les formules d'Euler, on obtient finalement :

$$I(s) = -2i\pi \frac{e^{i\pi s}}{1 - e^{2i\pi s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

On a donc bien montré la formule des compléments. □

**Corollaire 4.** La fonction  $\Gamma$  ne s'annule pas. De plus, la fonction  $\frac{1}{\Gamma}$  est entière.

**Démonstration.** Si  $\Gamma$  s'annule, la formule des compléments implique que  $\frac{1}{\sin}$  s'annule sur  $\mathbb{C}$ , ce qui n'est pas. Ainsi, on peut écrire pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \Gamma(1-z) \frac{\sin(\pi z)}{\pi},$$

avec l'expression de droite, on voit que  $\frac{1}{\Gamma}$  possède des singularités effaçables en les entiers négatifs, donc qu'elle se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ . Or en les entiers positifs l'expression de droite n'est pas définie mais  $\frac{1}{\Gamma}$  l'est. Ainsi, par prolongement analytique, on peut bien définir  $\frac{1}{\Gamma}$  sur  $\mathbb{C}$  tout entier.  $\square$

**Référence :** Stein et Sharkachi, *Complex analysis*.