

Développement: Décomposition de Dunford et exponentielle matricielle

Arthur Maritch-Roy

Soient P_1, \dots, P_r des polynômes premiers entre eux deux à deux. Soit $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$, alors les (Q_i) sont premiers entre eux dans leur ensemble donc on peut écrire une relation de Bezout

$$Q_1 U_1 + \dots + Q_r U_r = 1,$$

et on vérifie alors que $Q_i U_i(u)$ est le projecteur sur $\ker(P_i(u))$ parallèlement aux autres (ok par le lemme des noyaux).

Théorème 1. (décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Alors $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. Ce couple est unique et ce sont des polynômes en u .

Démonstration. D'après le lemme des noyaux appliqué au polynôme minimal, qui est scindé par hypothèse :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} C_\lambda,$$

avec $C_\lambda \ker((u - \lambda \text{id}_E)^{m_\lambda})$ le sous-espace associé à la valeur propre λ . Soit $p_\lambda \in K[u]$ le projecteur sur C_λ parallèlement à la somme directe des autres. Alors puisque les C_λ sont stables par u :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\lambda} u \circ p_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} (u - \lambda \text{id} + \lambda \text{id}) \circ p_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} \lambda \text{id} \circ p_\lambda + \sum_{\lambda} (u - \lambda \text{id}) \circ p_\lambda =: d + n \end{aligned}$$

On voit alors que d et n conviennent et sont des polynômes en u . Si $u = d' + n'$ est une autre décomposition de Dunford, d' et n' commutent à u donc à d et n donc d et d' sont codiagonalisables donc $d - d'$ est diagonalisable et n et n' commutent donc $n' - n = d - d'$ est nilpotent donc nul, et on a bien unicité. \square

Lemme 2. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$\ln(I_n - M) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M^k}{k} \in \mathbb{C}[M].$$

Alors $\exp(\ln(I_n - M)) = I_n - M$.

Démonstration. On considère les séries formelles et on obtient le résultat. \square

Théorème 3. L'exponentielle de matrices est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M = D + N = D(I_n + D^{-1}N)$ sa décomposition de Dunford (on sait que D est inversible car son polynôme caractéristique est le même que celui de M).

Par surjectivité de \exp sur \mathbb{C} , on peut trouver des antécédents aux valeurs propres de D donc un antécédent de \exp de D . Par interpolation de Lagrange, cet antécédent A peut être un polynôme en D donc en M .

Avec le lemme on obtient $\exp(\ln(I_n - D^{-1}N)) = I_n - D^{-1}N$. On pose alors $B = \ln(I_n - D^{-1}N)$, c'est un polynôme de M car tout le monde est un polynôme en M . Donc A et B commutent donc $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = M$. \square

Remarque 4. (refaisons proprement le lemme des noyaux)

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_1, \dots, P_r des polynômes premiers entre eux deux à deux. On considère alors $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$ et on écrit une relation de Bezout sur ceux-ci :

$$U_1 Q_1 + \dots + U_r Q_r = 1.$$

On suppose dans la suite que $P_1 \cdots P_r(u) = 0$ (on peut toujours s'y ramener de toute façon). Dès lors, pour $x \in E$, on a la décomposition

$$x = \sum_{i=1}^r U_i Q_i(u) =: \sum_{i=1}^r \pi_i(x),$$

avec $\pi_i(x) \in \ker(P_i(u))$. Les (π_i) sont des endomorphismes de E , et on vérifie que $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $j \neq i$ donc que ce sont des projecteurs. On a donc une somme directe, et les projecteurs sur les espaces associés sont des polynômes en u .

Remarque 5. Considérons le diagramme suivant. On peut montrer que c'est un diagramme commutatif. Ainsi, si on cherche $D \in K[X]$ tel que $D(u) = d$ de la décomposition de Dunford, on peut voir se problème en remontant une à une les flèches du diagramme :

- On cherche d tel que la restriction de d à C_λ soit λid
- Cela revient à évaluer chaque u_λ en un polynôme tel que $D_\lambda(u_\lambda) = \lambda \text{id}$
- Cela revient à trouver D un antécédent de $(\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ par le théorème chinois, ce que l'on sait faire de manière algorithmique par Bezout.

$$\begin{array}{ccc}
 K[X]/\langle \Pi_u \rangle & \xrightarrow{c} & \prod_{\lambda} K[X]/\langle (X - \lambda)^{m_\lambda} \rangle \\
 \downarrow \varphi_u & & \downarrow (\varphi_{u_\lambda})_\lambda \\
 K[u] & \xrightarrow{\psi} & \prod_{\lambda} K[u_\lambda]
 \end{array}$$