

Développement: Théorème de Fejér

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on montre le théorème de Fejér classique, *i.e.* l'approximation en norme uniforme d'une fonction par les moyennes de Cesàro des sommes partielles de Fourier, puis le théorème de Fejér-Lebesgue, qui est quant à lui une version L^p de cette approximation.

Définition 1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit le noyau de Dirichlet :

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

ainsi que le noyau de Fejér :

$$K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin(Nt/2)^2}{N \sin(t/2)^2}.$$

Ainsi, les sommes partielles de Fourier s'écrivent : $S_N(f) = (D_N * f)$, et leur moyenne de Cesàro s'écrit $(K_N * f)$. On montre facilement que K_N est une approximation de l'unité sur $[0, 2\pi]$ (en fait, elle converge au sens des distributions vers $\delta_{\mathbb{Z}}$).

Théorème 1. (de Fejér)

Soit f une fonction continue et 2π -périodique, alors $(K_N * f)_N$ converge uniformément vers f .

Démonstration. On note, pour $\delta > 0$,

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq \delta\}.$$

On a alors, pour $\delta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |(K_N * f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_N(t) dt \right| \text{ car l'intégrale du noyau vaut 1.} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} + \frac{2\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{|t| > \delta} K_N(t) dt \end{aligned}$$

Or pour $\delta < |t| \leq \pi$, $\sin(\delta/2) \leq \sin(|t|/2) \leq 1$ donc $K_N(t) \leq \frac{1}{N \sin(\delta/2)^2}$, ce qui donne finalement :

$$|(K_N * f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N \sin(\delta/2)^2}.$$

En prenant la borne supérieure en x , il vient :

$$\|K_N * f - f\|_{\infty} \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N \sin(\delta/2)^2},$$

puis quand N tend vers l'infini :

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \|K_N * f - f\|_{\infty} \leq \omega(\delta).$$

Ceci valant pour tout δ , on peut le faire tendre vers 0 ; puisque f est continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue par le théorème de Heine, ce qui implique que $\omega(\delta)$ tend vers 0 avec δ . Somme toute, on a bien le résultat voulu. \square

On passe maintenant au cas L^p , $p \in [1, \infty[$. Il existe un résultat plus général qui entraîne le théorème de Fejér-Lebesgue.

Théorème 2. Soit $(\rho_n)_n$ une approximation de l'unité, et $f \in L^p_{2\pi}$. Alors, on a la convergence suivante dans $L^p_{2\pi}$:

$$\rho_n * f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f.$$

Démonstration. Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\rho_n * f(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x) - f(x-y)| \, dy \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \right)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) \, dy \right)^{1/q} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder. Ce calcul est utile pour majorer la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f - f\|_p^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) dy \text{ par Fubini} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) \|\tau_y f - f\|_p^p \, dy \end{aligned}$$

Par continuité des translations dans L^p , il existe, pour $\varepsilon > 0$ fixé, un $\delta > 0$ tel que pour $|y| \leq \delta$, la norme $\|\tau_y f - f\|_p$ soit majorée par ε . On coupe l'intégrale au niveau de δ comme précédemment. On peut alors majorer l'intégrale au voisinage de 0 par ε puisque l'intégrale de l'approximation de l'unité vaut 1, et pour l'autre intégrale on écrit $\|\tau_y f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$ pour se débarrasser du y puis on prend n suffisamment grand pour que l'intégrale de l'approximation soit assez petite (ce n existe par définition d'une approximation de l'unité). Somme toute, on a bien la convergence vers 0 de la norme, donc la convergence voulue. \square

Corollaire 3. (Fejér-Lebesgue)

Puisque le noyau de Fejér est une approximation de l'unité, les sommes de Fejér convergent dans L^p vers la fonction considérée. En particulier, les polynômes trigonométriques sont denses dans L^p .

Remarque 1. Le premier théorème de Fejér énoncé est fondamental, puisqu'il permet de savoir que si la série de Fourier de f converge simplement en un point t , c'est forcément vers $f(t)$ d'après le lemme de Cesàro. Ainsi, en ajoutant l'hypothèse \mathcal{C}^1 par morceaux sur f , on obtient que f est somme de sa série de Fourier.

Par ailleurs, le théorème de Fejér ne risque pas d'être vrai dans L^∞ , puisque les polynômes trigonométriques sont continus et qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Référence : Claude Zuily et Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.