Développement: Injectivité de la fonction caractéristique

Arthur Maritch-Roy

La fonction caractéristique est un objet central en probabilités. Elle permet d'effectuer des calculs sur des fonctions régulières plutôt que sur des mesures qui sont plus difficiles à manipuler.

Définition 1. La *fonction caractéristique* d'une variable aléatoire réelle X est la transformée de Fourier de la mesure $\mathbb{P}_X$:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}).$$

Proposition 1. (Inversion de Fourier pour les mesures positives)
Pour tous les réels $a < b$, et toute mesure μ positive finie, on a :

$$\frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) + \mu(]a,b[) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-ita} - \mathrm{e}^{-itb}}{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

où φ est la fonction caractéristique associée à la mesure μ.

Ainsi, la fonction caractéristique caractérise la loi.

Démonstration. On note $I_T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-ita}-\mathrm{e}^{-itb}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$. Pour $x \notin \{a,b\}$, on a, par changement de variables :

$$I_T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T(x-a)}^{T(x-a)} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi}\int_{-T(x-b)}^{T(x-b)} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Mais comme l'intégrale du sinus cardinal est semi-convergente (son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut π), on voit que si $x < a$ ou $x > b$, les deux termes vont se compenser et notre limite sera nulle, et que si $x \in]a,b[$, ils vont s'ajouter et valoir à la limite $\frac{1}{2\pi}(\pi+\pi) = 1$.

Par ailleurs, si $x = a$, on peut faire le calcul à la main :

$$I_T(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(a-b)}}{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-T}^{T} \frac{1-\cos(t(b-a))}{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t + \int_{-T}^{T} \frac{1-\sin(t(b-a))}{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right].$$

Par parité, l'intégrale de gauche vaut zéro tandis que celle de droite va tendre vers l'intégrale sur sinus cardinal sur $\mathbb{R}$. Somme toute, on trouve bien $\frac{1}{2}$. On fait de même pour b et on obtient :

$$\lim_{T\to\infty} I_T(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{a,b\}}(x) + \mathbf{1}_{]a,b[}(x).$$

Ensuite, passons au cas général. La fonction mesurable de deux variables $(x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est bornée sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$. Alors, elle est intégrable contre la mesure finie $\lambda_{[-T,T]} \otimes \mu$. Par le théorème de Fubini :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-ita} - \mathrm{e}^{-itb}}{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} I_T(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Or $(T,x) \mapsto I_T(x)$ est bornée puisque le sinus cardinal est d'intégrale finie et borné entraîne μ-intégrable car μ est finie. Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-ita}-\mathrm{e}^{-itb}}{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} I_T(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

ce qui est la formule d'inversion voulue d'après la première étape.

Pour un singleton, on peut écrire, toujours avec le théorème de Fubini :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mu(\{b\}) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{b\}} \operatorname{sinc}(T(x-b))\,\mathrm{d}\mu(x),$$

et faire tendre T vers l'infini par convergence dominée pour obtenir :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mu(\{b\}).$$

Avec ceci, on voit que les lois de deux variables aléatoires réelles qui ont même fonction caractéristique sont égales sur les segments, qui forment un π-système. Ainsi, les lois de ces variables aléatoires sont égales par le lemme des classes monotones. $\square$

Remarque 1. Avec la décomposition de Hahn pour les mesures signées, on doit pouvoir en déduire l'injectivité de la transformée de Fourier pour les mesures signées.

Références : Jean-Yves Ouvrard, *Probabilités 2*. Pour le lien avec les mesures signées, on peut se renseigner dans le Rudin (*Analyse réelle et complexe*).