Développement: Processus de Galton-Watson

Arthur Maritch-Roy

On s'intéresse ici au processus de Galton-Watson, étudié historiquement pour comprendre l'extinction des patronymes dans la bourgeoisie européenne.

Soit P une loi sur $\mathbb{N}$, appelée *loi de reproduction*, et soit $Z_0 = 1$. On définit par récurrence :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k},$$

où $(X_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite doublement indicée i.i.d de loi P. La suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, dont la matrice de transition $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(z, \cdot) = P^{*z}.$$

Remarquons alors que 0 est un état absorbant pour cette chaîne de Markov ; on définit le *temps d'extinction*

$$T := \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Pour que le modèle soit intéressant (ni déterministe ni géométrique), il faut supposer :

$$0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1.$$

On note m et σ^2 les moyenne et variance de P, supposées finies. On peut montrer que si m est finie, l'espérance de Z_n vaut m^n, ce qui amène à distinguer trois cas :

- le cas *sous-critique*, qui correspond à $m < 1$
- le cas *critique*, qui correspond à $m = 1$
- le cas *sur-critique*, qui correspond à $m > 1$.

Proposition 1. Pour $n \geq 1$, $g_n := G_{Z_n} = g^{\circ n}$, si g est la série génératrice de la loi de reproduction P.

Démonstration. Pour $n \geq 1$ et $s \in [0, 1]$:

$$g_{n+1}(s) = \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}|Z_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{X_{1,1}})^{Z_n}) = \mathbb{E}(g(s)^{Z_n}) = g_n(g(s)),$$

d'où le résultat par récurrence. □

Théorème 2. Presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \in \{0, +\infty\},$$

et donc $T < \infty$ si et seulement si Z_n tend vers 0 (est nulle à partir d'un certain rang).

Démonstration. On se passe ici de la théorie des chaînes de Markov. On part de

$$\mathbb{P}(\lim Z_n \notin \{0, \infty\}) = \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}^*, Z_n = k \text{ pour une infinité de } n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\limsup(Z_n = k)).$$

Puisque 0 est un état absorbant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = k) &\leq \mathbb{P}(Z_n \neq 0)\\ &\leq \mathbb{P}(Z_n \neq 0 \cap Z_{n-1} \neq 0)\\ &\leq \mathbb{P}(Z_n \neq 0 | Z_{n-1} \neq 0)\, \mathbb{P}(Z_{n-1} \neq 0)\\ &\leq (1-p_0)\, \mathbb{P}(Z_{n-1} \neq 0)\\ &\leq \cdots\\ &\leq (1-p_0)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ce dernier terme étant sommable en n, on peut appliquer le lemme de Borel-Cantelli qui assure que $\mathbb{P}(\limsup (Z_n = k)) = 0$ donc $\mathbb{P}(\lim Z_n \notin \{0, \infty\}) = 0$. $\square$

Théorème 3. La probabilité $\mathbb{P}(T < \infty)$ est un point fixe de g. Si $m \leq 1$ alors $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ et si $m > 1$ alors $\mathbb{P}(T < \infty)$ est l'unique point fixe de g dans $]0, 1[$.

Démonstration. Puisque $Z_n \in \mathbb{N}$:

$$\{T < \infty\} = \{\lim Z_n = 0\} = \bigcup_{n \geq 0} (Z_n = 0).$$

Ainsi, par union croissante :

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \to \infty} g^{\circ n}(0).$$

Par continuité de g, la limite est donc un point fixe de g.

Par ailleurs, puisque $p_0 + p_1 < 1$, la fonction g est strictement convexe. Ainsi sa dérivée sur $[0, 1]$ et atteint son maximum en 1, avec $g'(1^-) = m$. On considère alors la fonction $h : x \mapsto g(x) - x$, sa dérivée double est la même que celle de g donc h est strictement convexe. De plus $h(0) = p_0 > 0$ et $h(1) = 0$. Si $m \leq 1$, alors $h'(1) = m - 1 \leq 0$. Comme $h'(0) = p_1 - 1 \leq 0$ et que h' est croissante, h' est toujours négative donc h est décroissante, et puisque $h(1) = 0$, h est toujours positive, et même strictement positive par stricte convexité. Ainsi le seul point fixe de g est 1. Maintenant, si $m > 1$, la dérivée de h change de signe entre 0 et 1 donc s'annule sur $]0, 1[$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Par stricte convexité de h, ce point où la dérivée s'annule est l'unique minimum de h sur $]0, 1[$, notons-le z. La fonction h est alors croissante entre z et 1 et ne s'y annule pas. Par stricte convexité et théorème des valeurs intermédiaires, h admet un unique zéro sur $]0, z[$ (et donc sur $]0, 1[$). C'est l'unique point fixe de g sur $]0, 1[$. $\square$

Proposition 4. Dans le cas sous-critique, la convergence de $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ vers 1 est géométrique.

Démonstration. Sur $[0, 1]$, $|g'| \leq m$ donc g est m-contractante, et on a le résultat par théorème de point fixe. $\square$

Proposition 5. Si Z_1 admet une variance et si $m = 1$, alors

$$1 - q_n := \mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}.$$

Démonstration. On peut écrire une formule de Taylor pour g (avec $g'(1^-) = 1$) :

$$1 - g(s) = 1 - s - \frac{\sigma^2}{2}(1-s)^2 + (1-s)^2 \alpha(s),$$

où α est continue sur un voisinage de 1 et tend vers 0 quand s tend vers 1^-. On a alors

$$\frac{1}{1-g(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{g(s) - s}{(1-g(s))(1-s)} = \frac{\frac{\sigma^2}{2} + \alpha(s)}{1 - \frac{\sigma^2}{2}(1-s) - (1-s)\alpha(s)},$$

cette dernière quantité pouvant s'écrire $\frac{\sigma^2}{2} + \beta(s)$ avec β qui vérifie les mêmes propriétés que α. En notant $q_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, on a

$$\frac{1}{1-q_{n+1}} - \frac{1}{1-q_n} \sim \frac{\sigma^2}{2},$$

d'où le résultat par sommation des relations de comparaison. $\square$

Proposition 6. Si Z_1 admet un moment d'ordre trois, et si l'on note $\rho = g^{(3)}(1)$, alors

$$1 - q_n = \frac{2}{\sigma^2 n} + \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{2\rho}{3\sigma^4} - 1\right)\frac{\log(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n^2}\right).$$

Démonstration. On part cette fois-ci d'un développement de Taylor à l'ordre trois :

$$g(s) = s + \frac{\sigma^2}{2}(s-1)^2 + \frac{\rho}{6}(s-1)^3 + (s-1)^3\alpha(s).$$

Et on obtient de la même façon :

$$\frac{1}{1-g(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho}{3\sigma^2}\right)(1-s) + \beta(s)(1-s)$$

En évaluant en q_n puis en sommant et en utilisant l'équivalent précédemment obtenu, on trouve :

$$\frac{1}{1-q_n} = \frac{n\sigma^2}{2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho}{3\sigma^2}\right)\log(n) + \mathrm{o}(\log(n)).$$

En inversant cette asymptotique on trouve le résultat voulu. $\square$