Développement: théorème de Hadamard-Lévy

Arthur Maritch-Roy

Le théorème d'inversion globale est insatisfaisant dans le sens où prouver l'injectivité d'une fonction revient à exhiber sa réciproque. Le théorème d'Hadamard-Lévy demande une hypothèse qui est souvent plus simple à vérifier.

Définition 1. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite *propre* lorsque pour l'image réciproque de tout compact est compacte.

Proposition 1. Une fonction continue est propre si et seulement si $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\|\to\infty]{} \infty$.

Démonstration. Si f ne tend pas vers l'infini quand la norme tend vers l'infini, alors il existe un ensemble non borné A tel que $f(A)$ est inclus dans une boule fermée, et alors l'image réciproque de cette boule fermée ne peut pas être compacte *i.e.* f n'est pas propre. Réciproquement, si f n'est pas propre, il existe un compact K tel que $f^{-1}(K)$ ne soit pas compact. Mais f étant continue, cet ensemble est pourtant fermé donc forcément il n'est pas bornée et on a bien le résultat. □

Théorème 2. (Hadamard-Lévy)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si f est propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est inversible.

Démonstration. Tout d'abord, si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors en différentiant $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, on obtient que $\mathrm{d}f(x)$ est inversible. Par ailleurs, f est propre puisque f^{-1} est continue donc l'image par f^{-1} (qui correspond à l'image réciproque par f) de tout compact est compacte.

Réciproquement, on suppose que f est propre et que sa différentielle en tout point est inversible. On souhaite appliquer le théorème d'inversion globale, mais pour cela il nous faut l'injectivité de f. On veut montrer que pour tout z, l'ensemble $f^{-1}(\{z\})$ est réduit à un élément. Quitte à tout décaler, on se ramène à $z = 0$. Toute la preuve repose sur l'introduction du flot suivant :

$$F : x \mapsto -\mathrm{d}f(x)^{-1} \cdot f(x),$$

qui est une application $\mathcal{C}^1$ puisque f est $\mathcal{C}^2$ et que l'inversion est continue. On considère alors le problème de Cauchy

$$y' = F(y), \quad y(0) = q \in \mathbb{R}^n.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une unique solution maximale

$$\varphi(\cdot, q) : [0, T^*[\mapsto \mathbb{R}^n.$$

On veut montrer que les trajectoires restent dans un compact pour avoir des solutions globales. Mais puisque f est propre, cela revient à montrer que l'image par f de ces trajectoires est bornée. Soit donc

$$g : t \mapsto f(\varphi(t, q)),$$

qui et $\mathcal{C}^1$ par composition et qui vérifie :

$$g'(t) = \mathrm{d}f(\varphi(t, q))(\partial_t \varphi(t, q)) = -g(t).$$

Ainsi pour tout t, $f(\varphi(t,q)) = \mathrm{e}^{-t}f(q)$, *i.e.* le flot est à valeurs dans $f^{-1}(\overline{B}(0,\|f(q)\|))$, compact car f est propre. Donc $T^* = +\infty$. En particulier, il existe une suite (t_k) tendant vers l'infini et un vecteur y tels que

$$\varphi(t_k,q) \xrightarrow[k\to\infty]{} y.$$

Par continuité de f, $f(y) = 0$ donc f est surjective.

Maintenant, on veut avoir la convergence globale du flot vers y. Pour cela, on veut passer f de l'autre côté de l'expression obtenue précédemment. Pour cela, on applique le théorème d'inversion locale : on sait que f est un difféomorphisme d'un ouvert U^y dans une boule fermée B^y de rayon δ_y. On sait, d'après ce qui précède, qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0,q) \in U^y$. On voit alors que

$$\{t \geq t_0, \varphi(t,q) \in U^y\} = \{t \geq t_0, \varphi(t,q) = (f_{|U_y})^{-1}(\mathrm{e}^{-t}f(q))\}.$$

En effet, l'inclusion réciproque est immédiate en appliquant f, et l'inclusion directe vient du fait que pour tout $t > t_0$, $\mathrm{e}^{-t}f(q) = f(\varphi(t,q)) \in B^y$ par décroissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ donc on peut appliquer $f^{-1}_{|U_y}$. Or l'ensemble de gauche est ouvert et celui de droite est fermé, donc par connexité, ces deux ensembles sont égaux à $[t_0,\infty[$. Ainsi, on peut faire tendre t vers l'infini dans l'expression

$$\varphi(t,q) = (f_{|U^y})^{-1}(\mathrm{e}^{-t}f(q)),$$

et obtenir que le flot converge globalement vers y le seul zéro de f dans U^y.

Finalement, si on note W^y l'ensemble des conditions initiales qui font converger le flot vers y, on obtient une partition :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y\in f^{-1}(\{0\})} W^y.$$

Soit $q \in W^y$. On sait qu'il existe un $T > 0$ tel que $\varphi(T,q) \in \mathrm{B}(y,\eta_y)$, où η_y est choisi pour avoir $\mathrm{B}(y,2\eta_y) \subset U^y$. Par continuité du flot, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $\|\varphi(T,q) - \varphi(T,q')\| < \eta_y$ dés que $\|q - q'\| < \delta$. On a donc $\varphi(T,q') \in \mathrm{B}(y,2\eta_y) \subset U^y$. Ainsi la trajectoire partant de q' converge vers y donc $\mathrm{B}(q,\delta) \subset W^y$, qui est donc une partie ouverte. Comme les $(W^y)_y$ forment une partition d'ensembles non vides ouverts de $\mathbb{R}^n$, ils ne font qu'un, c'est-à-dire que f est injective donc bijective donc un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme par inversion globale. ☐

Application 1. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, pour tout $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\|a\| < \varepsilon$ et $\|L - I_n\| < \varepsilon$, alors il existe un difféomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que :
— $\forall \|x\| < 1, f(x) = L(x) + a$
— $\forall \|x\| > 2, f(x) = x$.

Démonstration. On considère une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-1,1]$ et 0 en dehors de $[-2,2]$. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(x) = x + \chi(\|x\|^2)(Lx + a - x),$$

où L est inversible.
Cette application est clairement $\mathcal{C}^1$. En dehors d'une boule, cette application est l'identité. Ainsi, on a bien $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini. Ainsi f est propre. Pour $\|x\| < 1$ et $\|x > 2\|$ se calcule directement et est inversible. Pour un x de norme comprise entre 1 et 2 :

$$\mathrm{d}f(x)(h) = h + \chi(\|x\|^2)(Lh - h) + 2\langle x,h\rangle\chi'(\|x\|^2)(Lx + a - x) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi

$$\|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{Id}\| \leq (1 + 4\|\chi\|_\infty)\|L - \mathrm{Id}\| + 4\|\chi'\|_\infty\|a\|.$$

Ainsi, pour L assez proche de l'identité et a assez proche de 0, la différentielle de f est inversible pour tout x. On peut donc appliquer le théorème d'Hadamard-Lévy et conclure. ☐

Référence : Claude Zuily et Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation.* L'application provient de Thomas Cavallazzi.