Développement: le théorème de Krein-Milman

Arthur Maritch-Roy

Définition 1. Soit $C \subset E$ convexe. On dit que $c \in C$ est un *point extrémal* de C si $C \backslash \{c\}$ est convexe, ou de manière équivalente si $\frac{x+y}{2} = c$ entraîne $x = y = c$ pour $x, y \in C$ (c ne peut pas s'écrire comme milieu strict de points de C).

Démonstration. Supposons que c ne peut pas s'écrire comme milieu strict de points de C et montrons que $C \backslash \{c\}$ est convexe. Soient $x, y \in C$ qui ne sont pas c. On sait déjà que pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in C$. Maintenant, s'il existe $t_0 < 1/2$ [1] tel que $t_0 x + (1-t_0)y = c$, alors c serait le milieu du segment $[x, 2t_0 + (1-2t_0)]$ ce qui n'est pas.
Réciproquement, si c est le milieu de $[x, y]$, avec x et y différents de c, alors $C \backslash \{c\}$ n'est pas connexe puisque le segment $[x, y]$ contiendrait un point qui n'est pas dans $C \backslash \{c\}$ (en l'occurrence c, j'avoue c'est lourd). □

Définition 2. On dit que H est un hyperplan d'appui $a^\perp$ à C en $c \in C$ si $c \in H$ et si C est inclus dans $\{x \in E, \langle x - c, a \rangle \geq 0\}$ ou $\{x \in E, \langle x - c, a \rangle \leq 0\}$.

Proposition 3. Soit C un convexe fermé non vide. Si $c \in \partial C$, il existe un hyperplan d'appui à C en c.

Démonstration. On raisonne "par dualité" en cherchant une suite de directions orthogonales ; plutôt que de trouver une suite d'hyperplans qui converge vers notre hyperplan d'appui, on va regarder la suite des directions orthogonales, ce qui est plus dans nos cordes...

Soit $c \in \partial C$. En particulier, $c \in \overline{E \backslash C}$. Donc il existe (x_k) une suite d'éléments de $(E \backslash C)$ qui converge vers c. D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, si on note p la projection sur C, l'hyperplan affine H_k orthogonal à $x_k - p(x_k)$ passant par x_k est tel que C est inclus dans un demi-espace formé par H_k [2]. Si on note alors $u_k = \frac{x_k - p(x_k)}{\|x_k - p(x_k)\|}$, on peut, quitte à extraire, supposer que u_k converge vers u de norme 1 (on vient de faire "converger" les hyperplans, et on va considérer l'hyperplan limite). Soit alors H d'équation $\langle x, u \rangle = \langle c, u \rangle$, et $z \in C$. Pour tout k

$$\langle u_k, z - p(x_k) \rangle \leq 0$$

et donc quand k tend vers l'infini (avec la continuité de p et du produit scalaire) :

$$\langle u, z - p(c) \rangle = \langle u, z - c \rangle \leq 0,$$

ce qui montre que H est bien un hyperplan d'appui. □

Proposition 4. Soit $a \in C$, on suppose que a est dans un hyperplan d'appui H de C. Alors a est point extrémal de C si et seulement si a est point extrémal de $H \cap C$.

Démonstration. Si a est extrémal, alors $C \backslash \{a\}$ est convexe. De plus :

$$(C \backslash \{a\}) \cap H = (C \cap H) \backslash \{a\}$$

1. On peut toujours se ramener à ce cas quitte à échanger x et y, et non ce n'est pas $1/2^2$.
2. Cela peut sembler obscur dit comme ça, mais c'est exactement une des conséquences du théorème, que Karine appelle caractérisation par l'angle obtus.

puisque $a \in H$, or comme $C\backslash\{a\}$ et H sont convexes, $C\backslash\{a\} \cap H$ l'est donc $(C \cap H)\backslash\{a\}$ est convexe, ce qui veut dire par définition que a est point extrémal de $H \cap C$. Réciproquement, si a est extrémal dans $H \cap C$, on considère u et v dans C et $a = \frac{u+v}{2}$. Soit φ tel que $H = \{\varphi = \lambda\}$. On peut supposer que $\varphi(u)$ (et donc $\varphi(v)$) est inférieur à λ. Mais alors par linéarité, $\varphi(a) = \frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2} = \lambda$ et donc $\varphi(u) = \varphi(v) = \lambda$ donc $u, v \in H$. Ceci permet de conclure. □

Ce qui est dur dans ces preuves et de bien penser à toutes les caractérisations d'un hyperplan, d'un point extrémal il faut avoir une bonne vision des notions et du problème.

Théorème 5. (de Krein-Milman)
Soit C un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^d$. Alors il est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension (la proposition précédente nous invite à le faire). Le résultat est vrai en dimension 1 (les convexes de $\mathbb{R}$ sont les segments, dont on connaît les points extrémaux). On suppose le résultat vrai en dimension inférieure ou égale à $d-1$.

Soit donc $c \in C$. On cherche à l'écrire comme barycentres de points extrémaux :

— c est à la frontière de C. Soit H un hyperplan d'appui en c et $C' = C \cap H$, on applique l'hypothèse de récurrence avec notre proposition précédente et on est bons.

— c est à l'intérieur de C. Soit D une droite qui passe par c. Alors $D \cap C$ est compact convexe inclus dans une droite donc c'est un segment $[a, b]$ avec a et b des points de ∂C. On conclut alors par associativité des barycentres.

□