Développement: Méthode de Laplace en dimension supérieure à 1

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on généralise la méthode de Laplace sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ et $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. On suppose que φ admet un minimum global en x_0 avec $\mathrm{H}\varphi(x_0)$ inversible (et donc strictement positive). On suppose de plus que

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) > \varphi(x_0).$$

Alors on a l'équivalent (quand t tend vers l'infini) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(x)\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}\,\mathrm{d}x \sim \frac{a(x_0)}{\sqrt{\det(\mathrm{H}\varphi(x_0))}}\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{d/2}\mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)}.$$

Démonstration. D'après le lemme de Morse appliqué en x_0 à φ. Il existe alors f un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un voisinage V de x_0 vers un voisinage W de x_0 tel que pour tout $x \in V$:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{2}\|f(x) - x_0\|^2.$$

On considère alors δ tel que $B(x_0, \delta) \subset W$, et on applique le changement de variable $y = f(x)$ pour $x \in f^{-1}(B(x_0, \delta))$:

$$\int_{f^{-1}(B(x_0,\delta))} a(x)\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)}\int_{B(x_0,\delta)} a(f^{-1}(y))\mathrm{e}^{-\frac{t\|y-x_0\|^2}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{|\mathrm{jac}f(f^{-1}(y))|}.$$

Le changement de variable $z = \sqrt{t}(y - x_0)$ donne alors

$$\int_{f^{-1}(B(x_0,\delta))} a(x)\mathrm{e}^{-t\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)}t^{-d/2}\int_{B(x_0,\sqrt{t}\delta)} a(f^{-1}(x_0+z/\sqrt{t}))\mathrm{e}^{-\frac{\|z\|^2}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{|\mathrm{jac}f(f^{-1}(x_0+\frac{z}{\sqrt{t}}))|}.$$

Cette intégrale se traite alors par convergence dominée, la domination découle de la régularité de f et de son inverse. On a alors l'équivalent voulu d'après le calcul de l'intégrale de Gauss et parce que $|\mathrm{d}f(x_0)| = \sqrt{\det(\mathrm{H}f(x_0))}$ (*cf.* preuve du lemme de Morse). Pour le reste de l'intégrale, il suffit d'écrire $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varepsilon$ et utiliser le fait que a est intégrable. $\square$