

Développement: Indécomposabilité de la loi de Poisson

Arthur Maritch-Roy

Définition 1. On définit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par :

$$\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \delta_n.$$

C'est une loi qui modélise des événements rares. Elle admet des moments à tout ordre et sa variance et son espérance sont toutes deux égales à λ . Plus généralement, sa série génératrice est entière sur \mathbb{C} et vaut :

$$G_{\mathcal{P}(\lambda)}(z) = e^{\lambda(z-1)} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Remarque 1. La convolution de deux lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ est égale à la loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$. L'objectif de ce développement est de montrer la réciproque de ce résultat.

Théorème 1. Si \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telles que $\mathbb{P}_1 * \mathbb{P}_2 = \mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$, alors \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont des lois de Poisson. Plus simplement, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} indépendantes dont la somme suit une loi de Poisson, alors X et Y suivent une loi de Poisson.

Démonstration. On considère donc deux variables X et Y comme dans l'énoncé et leurs séries génératrices respectives, que l'on note f et g . *A priori*, leur rayon de convergence est plus grand que 1 :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \quad \forall z \in D(0, 1).$$

La première étape consiste à montrer que f et g sont en fait entières. Si λ est le paramètre de la loi (de Poisson) de $Z = X + Y$, alors par indépendance de X et Y :

$$f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)} \quad \forall z \in D(0, 1).$$

On a donc, par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \geq \max(p_n q_0, p_0 q_n).$$

En particulier, $p_n \leq e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n! q_0}$ et idem pour q_n donc l'identité précédente est valable sur \mathbb{C} , *i.e.* f et g sont entières. Maintenant, on cherche des majorations fortes de f et g . On considère pour cela $z \in \mathbb{C}^*$ et puisque les coefficients dans le développement en série entière de f et g sont positifs, on a :

$$|f(z)| \leq f(|z|) \text{ donc } f(|z|) \leq q_0^{-1} f(|z|)g(|z|) = e^{\lambda(|z|-1)}.$$

En faisant de même pour g , on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\max(|f(z)|, |g(z)|) \leq C e^{\lambda(|z|-1)}$. Par ailleurs, les fonctions f et g étant entières et sans zéro (sinon fg en aurait un) donc elles s'écrivent e^F et e^G , où F et G sont entières (*cf. infra*). On a donc $\max(e^{\operatorname{Re}(F(z))}, e^{\operatorname{Re}(G(z))}) \leq C e^{\lambda(|z|-1)}$. On peut donc passer au logarithme (réel) et appliquer le lemme de la partie réelle d'Hadamard (*cf. infra*), qui nous donne $F(z) = \alpha z + a$ et $G(z) = \beta z + b$ où α, β, a, b sont des réels. Puisque $f(1) = g(1) = 1$, on peut écrire $f(z) = e^{\alpha(z-1)}$ donc $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$ et de même $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$. \square

Montrons maintenant les deux résultats que l'on a utilisés dans cette preuve.

Fait 1. Soit f un fonction entière qui ne s'annule pas sur \mathbb{C} , alors f s'écrit e^F avec F entière.

Démonstration. On peut considérer F une primitive de la fonction $\frac{f'}{f}$, qui est entière car $\frac{f'}{f}$ l'est puisque f ne s'annule pas sur \mathbb{C} . On peut alors dériver $\frac{e^F}{f}$:

$$\left(\frac{e^F}{f}\right)' = \frac{(f'/f)e^F f - e^F f'}{f^2} = 0.$$

Ainsi les deux fonctions e^F et f sont égales quitte à ajuster la valeur de F en un point. \square

Théorème 2. (de la partie réelle d'Hadamard)

Soit $f = u + iv = \sum_{a_n} z^n$ une fonction entière et

$$A(r) := \sup_{|z|=r} u(z).$$

Alors pour $n \geq 1$ et $r > 0$, $|a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$. Si de plus $A(r) = O_{+\infty}(r^d)$ pour $d \in \mathbb{N}$ alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à d .

Démonstration. L'idée est d'avoir une formule de Cauchy pour u . On part donc des identités :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \text{ et } 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta, \quad n \geq 1.$$

En conjuguant la deuxième que l'on ajoute à la première, on obtient :

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

On peut alors faire apparaître artificiellement $A(r)$:

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - A(r)) e^{-in\theta} d\theta,$$

puis on prend le module en se rappelant que u et A sont des fonctions à valeurs réelles et que la deuxième est plus grande que la première :

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A(r) - u(re^{i\theta})) d\theta.$$

On conclut donc puisque $a_0 = f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$. On obtient ensuite le résultat en faisant tendre le rayon vers l'infini.

Référence : Hervé et Martine Queffélec, *Analyse complexe*.