

# Développement: Théorème de linéarisation de Lyapounov

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on montre le théorème de linéarisation de Lyapounov, qui permet de conclure quant à la stabilité d'un système en étudiant son système linéarisé.

**Théorème 1.** (de Lyapounov)

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(0) = 0$ . On suppose que les valeurs propres de  $A := df(0)$  ont toutes une partie réelle strictement négative. Alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de l'équation  $y' = f(y)$ .

*Démonstration.* Par le théorème de Jordan, on sait que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système linéarisé  $z' = Az$ . On considère le produit scalaire suivant sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$b(x, y) := \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt.$$

Il est bien défini par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation de la norme de  $e^{tA}$  qui peut être obtenue par Jordan encore une fois. On note  $q$  la forme quadratique associée. Puisque c'est une forme quadratique, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $h \in \mathbb{R}^n$  :

$$dq(x)(h) = 2b(x, h).$$

Remarquons qu'en particulier

$$dq(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = 2 \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt = -\|x\|^2.$$

Soit maintenant  $(y, I)$  l'unique solution maximale à notre problème de Cauchy pour la condition initiale  $y(0) = y_0$ . Par composition, si on note  $r(y) = f(y) - Ay$  :

$$\begin{aligned} \frac{dq(y(s))}{ds} &= dq(y(s))(y'(s)) \\ &= 2b(y(s), Ay(s)) + 2b(y(s), r(y(s))) \\ &= -\|y(s)\|^2 + 2b(y(s), r(y(s))) \\ &\leq -cq(y(s)) + 2\sqrt{q(y(s))}\sqrt{q(r(y(s)))} \end{aligned}$$

Par équivalence des normes et Cauchy-Schwarz. Par définition de la différentielle,  $r(y(s)) = o(\|y(s)\|)$  donc

$$\frac{dq(y(s))}{ds} = -cq(y(s)) + o(q(y(s))).$$

Ainsi, il existe une constante  $\beta > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $q(y(s)) \leq \alpha$  entraîne

$$\frac{dq(y(s))}{ds} \leq -\beta q(y(s)) < 0.$$

Supposons que  $q(y_0) < \alpha$ . On considère alors  $\{t > 0, q(y(t)) \leq \alpha\}$ . C'est un ensemble fermé par construction et ouvert puisque si  $t_0$  est dedans alors la dérivée de  $q \circ y$  en ce point va être

strictement négative donc la fonction va être décroissante sur un petit voisinage. Cet ensemble est donc connexe donc c'est tout  $I$ . Ainsi les solutions sont dans la boule fermée de centre 0 et de rayon  $q(y_0)$  donc par théorème des bouts les solutions sont globales et alors pour tout  $t \geq 0$  :

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(y_0).$$

On peut alors conclure par équivalence des normes. □