

Développement: Lemme de Morse

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on montre le Lemme de Morse, qui permet d'étudier le comportement d'une fonction de plusieurs variables au voisinage d'un point critique non dégénéré. Pour commencer, on précise le résultat d'orthogonalisation simultanée sur \mathbb{R} , en voyant que la réduction peut être \mathcal{C}^1 au voisinage d'une forme quadratique non dégénérée.

Proposition 1. (Changement de base \mathcal{C}^1)

Soit A_0 une matrice symétrique réelle inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ telle que

$$A = \rho(A)^\top A_0 \rho(A) \quad \forall A \in V.$$

Démonstration. On considère l'application f définie par $f(M) = M^\top A_0 M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est une application \mathcal{C}^1 car polynomiale en les coefficients de M . De plus, un calcul simple donne :

$$df(I_n).H = H^\top A_0 + A_0 H,$$

donc $\ker(df(I_n)) = A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $F = A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui est un supplémentaire de $\ker(df(I_n))$, et considérons ψ la restriction de f à F . Étant donné que I_n est dans F , l'expression de $d\psi(I_n)$ est la même que pour f . De plus, d'après le théorème du rang, $d\psi(I_n)$ est maintenant bijective. Par inversion locale, il existe un voisinage U de I_n dans F (que l'on peut supposer inclus dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ car c'est un ouvert), et V un voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que ψ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V . Si on pose $\rho := \psi^{-1}$, on a alors :

$$A = \psi(\rho(A)) = (\rho(A))^\top A_0 \rho(A) \quad \forall A \in V.$$

□

Théorème 2. (Lemme de Morse) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n qui contient 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose que la différentielle de f en 0 est nulle et que la hessienne de f en 0 est non-dégénérée, de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme φ entre deux voisinages V_0 et $W_0 = \varphi(V_0)$ de 0 dans \mathbb{R}^n tels que $\varphi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2.$$

Démonstration. Quitte à restreindre U , on peut le supposer égal à une boule ouverte. Sur cette boule (convexe) on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre deux (avec $df(0) = 0$) :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)x^\top \text{H}f(tx)x dt =: x^\top Q(x)x, \quad Q(x) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

La fonction Q est \mathcal{C}^1 car f est \mathcal{C}^3 et par dérivation sous l'intégrale. De plus, $Q(0) = \frac{1}{2}\text{H}f(0)$ qui est inversible et de signature $(p, n - p)$ par hypothèse. Le lemme précédent assure alors qu'il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V, \quad A = (\rho(A))^\top Q(0)\rho(A).$$

Par continuité de Q , il existe W un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $Q(W) \subset V$. On a donc :

$$\forall x \in W, \quad f(x) - f(0) = (\rho(Q(x))x)^\top Q(0)\rho(Q(x))x.$$

D'après le théorème d'inertie de Sylvester, si Δ est la matrice diagonale avec p 1 et $(n-p) -1$, alors il existe $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(0) = M^\top \Delta M$. Pour $x \in W$, on pose alors $\varphi(x) = M\rho(Q(x))x$, qui est \mathcal{C}^1 par composition, et qui vérifie donc :

$$f(x) - f(0) = \varphi(x)^\top \Delta \varphi(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2.$$

Il reste à voir que φ est un difféomorphisme local. Pour cela, on remarque que $d\varphi(0) = M\rho(Q(0)) = M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, et on applique le théorème d'inversion locale. \square

Référence : François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*.