Développement: Nombre de cycles d'une permutation aléatoire

Arthur Maritch-Roy

On regarde dans ce développement comment générer une permutation selon ses cycles et comment en déduire la loi du nombre de cycles d'une permutation aléatoire.

Proposition 1. On se propose de construire une permutation comme suit :

— On ouvre un cycle (1

— On tire une suite η_j indépendante avec $\eta_j \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n-j+1}\right)$

— Pour i allant de 1 à n, tant que $\eta_i = 0$ on rajoute des éléments dans le cycle en cours en prenant uniformément des éléments parmi ceux qui restent (et indépendamment des autres) et si $\eta_j = 1$ on clôt le cycle et on en ouvre un nouveau (si $j \leq n$) en ajoutant un élément uniformément au début du cycle.

La permutation σ construite est alors uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Soit φ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ dont le cycle contenant 1 est de longueur $1 \leq k \leq n$. Alors, si les U_i sont indépendantes

$$\mathbb{P}(\sigma(1) = \varphi(1), \ldots, \sigma^k(1) = 1) = \mathbb{P}(\eta_1 = \ldots = \eta_{j-1} = 0, \eta_k = 1) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j},$$

soit donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sigma(1) = \varphi(1), \ldots, \sigma^k(1) = 1) &= \frac{1}{n-k+1} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j}\left(1 - \frac{1}{n-j+1}\right) \\
&= \frac{1}{n-k+1} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j} \frac{n-j}{n-j+1} \\
&= \frac{1}{n-k+1} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j+1} = \frac{(n-k)!}{n!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on formule l'hypothèse de récurrence suivante

$\mathcal{H}(p)$: l'algorithme crée des permutations aléatoires sur tout ensemble de cardinal p.

Avec les mêmes notations, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence et on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sigma = \varphi) &= \mathbb{P}(\sigma(1) = \varphi(1), \ldots, \sigma^k(1) = 1)\, \mathbb{P}(\sigma(j) = \varphi(j) \text{ sur les autres valeurs}) \\
&= \frac{(n-k)!}{n!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!},
\end{aligned}$$

donc on a bien une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. $\square$

Corollaire 2. Le nombre de permutations ayant k cycles dans $\mathfrak{S}_n$ est le coefficient en X^k du polynôme $\prod_{j=0}^{n-1}(X - j)$.

Démonstration. Avec les notations de l'algorithme précédent, le nombre de cycles de σ est la somme des η_j. Ainsi, le nombre de cycles K_n d'une permutation est égal en loi à une somme de Bernoulli indépendantes de paramètres $\frac{1}{j}$ pour j allant de 1 à n. Ainsi, la série génératrice de K_n, notée G, vaut

$$G(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(\left(1 - \frac{1}{j} \right) + \frac{1}{j} t \right).$$

Ainsi, si on note $C_{n,k}$ le nombre de permutations avec k cycles dans $\mathfrak{S}_n$, on a :

$$n! G(t) = \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} t^k = \prod_{j=1}^{n} (t + (j-1)) = \prod_{j=0}^{n-1} (t - j).$$

$\square$