

Développement: Nombres eulériens

Arthur Maritch-Roy

L'objectif est de donner une expression simple et plus pratique de la loi du nombre de descentes dans une permutation de \mathfrak{S}_n .

Définition 1. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ présente une descente au rang $i \in \{1, \dots, n-1\}$ si $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. On définit le nombre eulérien $A(n, k)$ comme le nombre de permutations de \mathfrak{S}_n qui présentent k descentes. Sous la loi uniforme, si on note D_n le nombre de descentes d'une permutation de \mathfrak{S}_n , alors on a $n! \mathbb{P}(D_n = k) = A(n, k)$.

L'objectif de ce développement est de montrer le théorème suivant, dû à S. Tanny (1973).

Théorème 1. Soit (U_1, \dots, U_n) un vecteur iid $(\mathcal{U}(0, 1))^{\otimes n}$, et $S_n = U_1 + \dots + U_n$. Alors $\lfloor S_n \rfloor$ et D_n ont même loi.

Avant de passer à la preuve du théorème à proprement parler, on passe par un lemme de probas.

Lemme. Soit (V_1, \dots, V_n) un vecteur iid $(\mathcal{U}(0, 1))^{\otimes n}$ et $U_k := \{V_1 + \dots + V_k\}$ où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire. Alors (U_1, \dots, U_n) est un vecteur iid de loi $(\mathcal{U}(0, 1))^{\otimes n}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ montrons que $\{a + U\} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ pour $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. En effet pour une fonction h continue bornée de $]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(\{a + U\})) &= \int_0^1 h(\{a + x\}) dx \\ &= \int_0^{1-\{a\}} h(\{a\} + x) dx + \int_{1-\{a\}}^1 h(\{a\} + x - 1) dx \\ &= \int_{\{a\}}^1 h(x) dx + \int_0^{\{a\}} h(x) dx \\ &= \int_0^1 h(x) dx = \mathbb{E}(h(U)). \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité on utilise la définition de la partie fractionnaire et on distingue donc les cas et dans la suivante on fait des changements de variable.

Une fois que l'on a cela, on peut écrire, pour $h = h_1 \otimes \dots \otimes h_n$ une fonction continue bornée sur l'espace produit $([0, 1]^n)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(U_1, \dots, U_n)) &= \int_{v_1, \dots, v_n \in [0, 1]^n} h(\{v_1\}, \dots, \{v_1 + \dots + v_n\}) dv_1 \cdots dv_n \\ &= \int_{v_1, \dots, v_n \in [0, 1]^n} h_1(\{v_1\}) \cdots h_n(\{v_1 + \dots + v_n\}) dv_1 \cdots dv_n \\ &= \int_{v_1=0}^1 h_1(v_1) \int_{v_2=0}^1 h_2(\{v_1 + v_2\}) \cdots \int_{v_n=0}^1 h_n(\{v_1 + \dots + v_n\}) dv_n \cdots dv_2 dv_1 \\ &= \int_0^1 h_1(v_1) dv_1 \cdots \int_0^1 h_n(v_n) dv_n \\ &= \mathbb{E}(h_1(V_n)) \cdots \mathbb{E}(h_n(V_n)) \end{aligned}$$

Pour la troisième égalité, on a utilisé Fubini et pour la quatrième le petit résultat du début. Ainsi, on obtient que le vecteur (U_1, \dots, U_n) est iid de loi $(\mathcal{U}(0, 1))^{\otimes n}$ (en effet, les fonctions continues bornées sous la forme $h_1 \otimes \dots \otimes h_n$ sont denses dans les fonctions continues bornées sur $[0, 1]^n$, puisqu'elles approchent les fonctions $\mathbf{1}_{A_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}_{A_n}$). \square

On passe alors à la preuve du théorème.

Démonstration. On suppose U construit comme dans le lemme à partir de $(V_1, \dots, V_n) \sim (\mathcal{U}(0, 1))^{\otimes n}$. On simule alors une permutation aléatoire comme suit. On sait qu'il existe une unique permutation σ de \mathfrak{S}_n telle que $U_{\sigma(1)}(\omega) < \dots < U_{\sigma(n)}(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. On définit alors $\sigma(\omega) := \sigma$. On peut montrer que $\sigma \sim \mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$, et on a alors une descente au rang i si et seulement si $U_i > U_{i+1}$.

On définit alors M_k comme le point d'affixe $e^{2i\pi U_k}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et on considère la marche qui consiste à parcourir le cercle en allant de M_1 à M_2 , puis de M_2 à M_3 etc dans le sens direct. Trouvons l'angle Θ_k que l'on parcourt en allant de M_{k-1} à M_k , c'est-à-dire le réel $\Theta_k \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{2i\pi(U_k - U_{k-1})} = e^{i\Theta_k}$. On écrit pour cela :

$$\begin{aligned} U_k - U_{k-1} &= \{V_1 + \dots + V_k\} - \{V_1 + \dots + V_{k-1}\} \\ &= V_k - [V_1 + \dots + V_k] + [V_1 + \dots + V_{k-1}] \\ &= V_k + m, \end{aligned}$$

où m est un entier. Ainsi, on a $\Theta_k = 2\pi V_k$. On a fait ce travail puisqu'une descente a lieu si et seulement si on passe par 1 dans notre marche sur le cercle. Ainsi, le nombre total de descentes correspond au nombre de multiples entiers de 2π présents dans $\Theta_1 + \dots + \Theta_n$, soit à :

$$D_n = \left\lfloor \frac{\Theta_1 + \dots + \Theta_n}{2\pi} \right\rfloor = [V_1 + \dots + V_n] \sim [S_n],$$

d'où le résultat. \square

On peut ajouter à ce résultat qui fait intervenir une probabilité une asymptotique, afin d'avoir un résultat qui est plus de l'ordre du dénombrement.

Proposition 2. Soit $\alpha \in [0, 1]$, alors, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$A(n, \alpha n) \underset{\alpha n \in \mathbb{N}}{\sim} n! \sqrt{\frac{12}{n}} \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6(\alpha-1/2)^2}.$$

Démonstration. On veut utiliser le théorème limite central. Pour cela, on se rappelle que $\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2}$ et $\text{Var}(S_n) = \frac{n}{12}$. Ainsi :

$$Z_n := \frac{\sqrt{12}(S_n - n/2)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha n < S_n < \alpha n + 1) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{12}(\alpha - 1/2) < \frac{\sqrt{12}(S_n - n/2)}{\sqrt{n}} < \sqrt{12}(\alpha - 1/2) + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right) \\ &=: \mathbb{P}\left(\beta < Z_n < \beta + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Pour F_n la fonction de répartition de Z_n et f_n sa densité

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\beta < Z_n < \beta + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right) &= F_n(\beta + \sqrt{12/n}) - F_n(\beta) \\
 &= \int_{\beta}^{\beta + \sqrt{12/n}} f_n(x) \, dx \\
 &= \int_{\beta}^{\beta + \sqrt{12/n}} g(x) \, dx + \int_{\beta}^{\beta + \sqrt{12/n}} (f_n - g)(x) \, dx \\
 &= \sqrt{12/n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est due à une généralisation du théorème limite central qui peut se trouver dans le Feller. On a donc :

$$A(n, \alpha n) \underset{\alpha n \in \mathbb{N}}{\sim} n! \sqrt{\frac{12}{n}} \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6(\alpha-1/2)^2}.$$

□

Références : page Wikipédia *Loi uniforme continue*. Pour le TCL, on peut regarder William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. II*, page 516. Merci à Jürgen Angst pour la référence.